الجبر العام

تأليف

دكتور متوكل عباس مهلهل — دكتور محمد أسعد محمد

دكتور محمد الصاوي عبد الماجد



الجبر العام

بسم الله الرحمن الرحيم

الجبر العام

تأليف

دكتور متوكل عباس مهلهل — دكتور محمد أسعد محمد

دكتور محمد الصاوي عبد الماجد



ص.ب : ١٠٧٢٠ - الرياض : ١١٤٤٣ - تلكس ٢٠٢١٢٩

المملكة العربية السعودية - تلفون ٤٦٥٨٥٢٣ - ٤٦٤٧٥٣١

المحتويات

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

إن بداية الأمة العربية في الاعتماد على العلوم الحديثة والتوسع في استخدام تطبيقاتها بصورة لم يسبق لها مثيل جعلاها في أمس الحاجة إلى نوع من التربية في الرياضيات والتفكير العلمي الذي يساعد الإنسان على تفهم القوة العلمية التي يستخدمها في حياته حتى يستطيع توجيهها لصالحه كما يجب أن لا ننسى إسهام الحضارة العربية الإسلامية وإثراءها لما يسمى بالعلوم الحديثة. فالحضارة الحديثة تدين بازدهارها أساساً للحضارة العربية الاسلامية بما نقلت عنها من أصول العلم وتفرعاته. ويهمنا هنا مساهمة العرب في فروع الرياضيات المختلفة وعلى وجه الخصوص ما يؤكده تاريخ الرياضيات من اسهامهم في وضع أساسيات مادة الجبر.

إن الغاية الأساسية لمؤسسات التعليم العالي من معاهد عليا وجامعات، في الوطن العربي، هي خدمة المجتمعات العربية التي أسست من أجلها. ولا يمكن تحقيق هذه الغاية على الوجه الأكمل إلا إذا كانت لغة التعليم في هذه المؤسسات هي اللغة التي يتقنها الطلاب والتي تربط الخريجين والباحثين بمشاكل مجتمعاتهم. فواجبنا أن لا ننسى انتماءنا إلى هذه الأمة ونتحدث بلسان الخبير الأجنبي بل نسعى لاستخدام اللغة العربية في التعليم العالي وتطويعها لتشمل وتستوعب كل النظريات والاكتشافات سريعة التطور والتجدد لإستعادة مركزها الذي تخلفت عنه زمناً طويلاً ولكي يتحقق الإبداع العلمي ويرتفع المستوى العلمي والثقافي للأمة.

إن من بين الدوافع التي تحول دون استعمال اللغة العربية للتدريس في الكليات العلمية بجامعاتنا العربية عدم توافر الكتب والمراجع باللغة العربية وإن المكتبة العربية تفتقر كثيراً إلى كتب في مختلف فروع العلم النظرية والتطبيقية والتكنولوجية. ونحن إذ نقدم هذا المؤلف المتواضع للقارىء العربي نأمل أن يسهم مع غيره من الكتب على سد هذا النقص لإعداد الأجيال التي نريد لها أن تبني صرح النهضة والحضارة على أسس وطيدة من المعرفة الحقة والتخطيط السليم.

هذا الكتاب هو حصيلة تجارب سنوات عدة في كلية التربية بالمدينة المنورة، جامعة الملك عبد العزيز، وهو مُزَوَّد بمادة مسهبة تغطي مقرراً في الجبر العام مدته ثلاث ساعات معتمدة. والكتاب يناسب المراحل الأولى في التعليم العالي ويحتوي على مجموعة من المواضيع التي تصلح أن تكون مورداً لعديد من المناهج في فروع الرياضيات والهندسة والاقتصاد. وبالإضافة إلى سِمَتِه ككتاب دراسي، سيروق عدداً كبيراً من القراء كما أنه سيكون بمثابة دليل فعّال للتعليم الذاتي ويرجع ذلك لمنهجه المبسط ولتدرج أمثلته.

ينقسم الكتاب إلى تسعة أبواب يبدأ كل باب بمجموعة من التعريفات والأساسيات المتعلقة بالموضوع مع مادة توضيحية ووصفية، تلي ذلك مجموعة متدرجة من المسائل المحلولة تستخدم في توضيح المادة ومجموعة من التمارين في نهاية كل باب بمثابة مراجعة كاملة للمادة المقدمة. لقد تم تنظيم الكتاب على نحو يسمح بالمرونة والإختيار وكان بودنا تقديم باب المصفوفات على المحددات حسب التسلسل الطبيعي للمادة وحرصاً منا فصل كل باب على حدة كما تتطلب طبيعة بعض التخصصات المختلفة التي يخدمها الكتاب، رأينا ترك هذا التسلسل الى مرحلة متقدمة.

وفي الختام نود أن نشكر لكثير من الأخوة والزملاء مقترحاتهم القيمة ومراجعتهم الدقيقة لأصول الكتاب ومنهم الأستاذ الدكتور السيد محمد الغزي

والأستاذ الدكتور عبد القيوم عبد الغني بابكر والـدكتور كـمال حسن عبد الغفـار والمعيدان بالكلية عبد الهادي الأحمدي وعبد الغني الحربي والأستاذ أحمد البـزرة. كما لا يسعنا إلا أن نتقدم بجزيل الشكر وعظيم الإمتنان لدار المريـخ للنشر على ما تبذله من مجهود ملموس لإثراء المكتبة العلمية العربية.

وأخيـراً نرجـو أن يؤدي هذا الكتـاب الأمل المنشـود كما نـأمـل من زمـلائنا بالجامعات العربية إبداء ملاحظاتهم التي تغني الكتاب بمعرفة إضافية لنضمنها في مكانها عند إعادة طبعه والله نسأل السداد والتوفيق.

المؤلفون

كلية التربية بالمدينة المنورة

١٤٠٧ هـ - ١٩٨٧ م

الباب الأول

الإستقراء الرياضي

(MATHEMATICAL INDUCTION)

كثير من القوانين والعلاقات الرياضية تكـون صحيحة لكـل عدد طبيعي n.
على سبيل المثال:

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n}{6}\ (n + 1)(2n + 1)$$

بالتعويض من السهل إثبات صحة العلاقة عند $n = 1, n = 2, n = 3, \ldots$. ولكن لا نستطيع استخدام هذه الطريقة لإثبات صحة العلاقة لجميع قيم n. نستخدم طريقة الإستقراء الرياضي في إثبات مثل هذه العلاقات، ولإعطاء مفهوم واضح لطريقة الإستقراء الرياضي يلزمنا النظرية التالية:

١ ـ نظرية الإستقراء الرياضي (Induction Principle)

لتكن P_n علاقة رياضية ما ترتبط بـالعدد الصحيح $n \in N = \{1, 2, 3, \ldots\}$
إذا كان:

(١) P_c صحيحة (أي أن العلاقة صحيحة عند قيمة معينة $c \in N$).

(٢) لكل عدد صحيح k أكبر أو يساوي c صحة العلاقة $P_k \Leftarrow$ صحة العلاقة P_{k+1}

فإن P_n تكون صحيحة لجميع قيم $n \in N$ التي تحقق $n \geqslant c$.

البرهان:

نفرض أن P_n ليست صحيحة لعدد صحيح n على الأقل، حيث $n > c$ تعرف الفئة F كالتالي:

$$F = \{ x \,|\, P_x \quad \text{غير صحيحة} \quad , x > c \}$$

واضح أن F فئة غير خالية من الأعداد الصحيحة الموجبة. ليكن m هو أصغر عدد في الفئة F. بما أن $m > c$ ينتج أن $m - 1 \geqslant c$. لكن $m - 1 \notin F$ إذن P_{m-1} تكون صحيحة. باستخدام (٢) ينتج أن P_m صحيحة ـ لكن $m \in F$ وبالتالي P_m غير صحيحة. بسبب التناقض تكون P_n صحيحة لجميع قيم $n \in N$ التي تحقق $n \geqslant c$.

١ ـ ٢ أمثلة محلولة:

مثال (١):

أثبت باستخدام الإستقراء الرياضي أن:

$$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

الحل:

(١) نختبر صحة القانون عندما $n = 1$ وذلك بالتعويض عن $n = 1$ في الطرفين. نجد أن الطرف الأيمن = الطرف الأيسر = ١.

(٢) نفرض أن القانون صحيح عندما $n = k$ أي:

$$\sum_{r=1}^{k} r = \frac{k\,(k+1)}{2}$$

(٣) نحاول أن نستخدم ما جاء في (٢) لإثبات صحة القانون عند القيمة التي تليها، أي عند $n = k + 1$ الطرف الأيسر

$$\sum_{r=1}^{k+1} r = \sum_{r=1}^{k} r + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

وهي نفس صيغة القانون عندما $n = k + 1$ ومن نظرية الإستقراء الرياضي ينتج أن القانون صحيح لجميع قيم $n \geqslant 1$.

مثال (٢):

أثبت باستخدام الإستقراء الرياضي أن:

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

الحل:

(١) نختبر صحة القانون عندما $n = 1$ وذلك بالتعويض عن $n = 1$ في الطرفين. نجد أن الطرف الأيمن = الطرف الأيسر = ١.

(٢) نفرض صحة القانون عندما $n = k$ أي أننا نفترض صحة العلاقة:

$$\sum_{r=1}^{k} r^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k}{6}(k+1)(2k+1)$$

(٣) نحاول أن نستخدم ما جاء في (٢) لإثبات صحة القانون عند القيمة التي تليها، أي عند $n = k + 1$ الطرف الأيسر.

$$\sum_{r=1}^{k+1} r^2 = 1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{(k+1)}{6}\left[k(2k+1) + 6(k+1)\right]$$

$$= \frac{(k+1)}{6}\left[2k^2 + 7k + 6\right] = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

وهي نفس صيغة القانون عندما $n = (k+1)$ ومن نظرية الإستقراء الرياضي. ينتج أن القانون صحيح لجميع قيم $n \geqslant 1$.

مثال (٣):

أثبت أن لكل عدد صحيح موجب n فإن $2 \mid (3^n - 1)$.

الحل:

(١) نختبر صحة القانون عندما $n = 1$:

$$\frac{3^1 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

∴ القانون صحيح عندما $n = 1$.

(٢) نفرض صحة القانون عندما $n = k$ أي أننا نفترض صحة العلاقة

$$3^k - 1 = 2r \quad , \quad r \in N \quad \text{حيث}$$

(٣) نحاول أن نستخدم ما جاء في (٢) لإثبات صحة القانون عند القيمة التي تليها، أي عند: $n = k + 1$.

$$3^{k+1} - 1 = 3^{k+1} - 3^k + 3^k - 1$$

$$= 3^k (3 - 1) + (3^k - 1)$$

$$= 23^k + 2r$$

$$= 2 (2r + 1) + 2r$$

$$= 2 (3r + 1)$$

إذاً $2 | (3^{k+1} - 1)$ أي أن صحة القانون عندما $n = k$ تستلزم صحته عندما $n = k + 1$. ومن نظرية الإستقراء الرياضي ينتج أن القانون صحيح لجميع قيم $n \geqslant 1$.

مثال (٤):

أثبت باستخدام الإستنتاج الرياضي أن:

$$(a^n - b^n) = (a - b) (a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + ... + b^{n-1})$$

لكل عدد $n \in N$.

يترك للطالب إثبات المثال (٤).

مثال (٥):

باستخدام طريقة الإستقراء الرياضي أثبت أن التفاضل النوني للدالة $\frac{1}{1 + x}$ هو:

$$\frac{d^n}{dx^n} (1 + x)^{-1} = \frac{(-1)^k k!}{(1 + x)^{k+1}} \quad .... (١)$$

الحل:

(١) القانون صحيح في حالة $n = 1$

(٢) نفرض أن القانون صحيح في حالة $n = k$ أي:

$$\frac{d^k}{dx^k}(1+x)^{-1} = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

(٣) عندما $n = k + 1$ فإن الطرف الأيسر (١) يساوي:

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(1+x)^{-1} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d^k}{dx^k}(1+x)^{-1}\right\}$$

بالتعويض من (٢):

$$= \frac{d}{dx}\left\{\frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}\right\}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(1+x)^{k+2}}$$

وهذا مساوٍ للطرف الأيمن من (١) إذا عوضنا $n=k+1$.

بما أننا أثبتنا صحة القانون عندما $n=1$ وأنه إذا كان القانون صحيحاً عندما $n=k$ فهو صحيح أيضاً عندما $n=k+1$، وبالتالي:

فإن القانون صحيح لجميع قيم n الصحيحة الموجبة بطريقة الاستقراء الرياضي.

مثال (٦):

باستخدام طريقة الإستقراء الرياضي أثبت نظرية ذات الحدين لأس صحيح

موجب على الصورة:

$$(1+x)^n = 1 + {}^nc_1\, x + {}^nc_2\, x^2 + \ldots + {}^nc_{n-1}\, x^{n-1} + x^n \ \ldots. \ (i)$$

الحل:

(١) النظرية صحيحة في حالة $n = 1$.

(٢) نفرض أن النظرية صحيحة في حالة $n = k$ أي:

$$(1+x)^k = 1 + {}^kc_1\, x + {}^kc_2\, x^2 + \ldots. + {}^kc_{k-1}\, x^{k-1} + x^k \ \ldots. \ (ii)$$

(٣) عندما $n = k + 1$ فإن الطرف الأيسر من (i) يساوي:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)\,(1+x)^k$$

$$= (1+x)\,(1 + {}^kc_1\, x + {}^kc_2\, x^2 + \ldots. + {}^kc_{k-1}\, x^{k-1} + x^k)$$

بالتعويض من (ii)

$$= 1 + ({}^kc_1 + 1)\, x + ({}^kc_2 + {}^kc_1)\, x^2 + \ldots. + ({}^kc_r + {}^kc_{r-1})\, x^r + \ldots. + x^{k+1}$$

$$= 1 + {}^{k+1}c_1\, x + {}^{k+1}c_2\, x^2 + \ldots. + {}^{k+1}c_r\, x^r + \ldots. + x^{k+1}$$

(لأن $\quad {}^kc_r + {}^kc_{r-1} = {}^{k+1}c_r$)

وهذا مساوٍ للطرف الأيمن من (i) إذا عوضنا $n = k + 1$.

بما أننا أثبتنا صحة القانون عندما $n = 1$ وأنه إذا كان القانون صحيحاً عندما $n = k$ فهو أيضاً صحيح عندما $n = k + 1$، وبالتالي فإن القانون صحيح لجميع قيم n الصحيحة الموجبة بطريقة الإستقراء الرياضي.

مثال (٧):

إذا كان a, b عددين صحيحين موجبين فأثبت أنه يوجد عددان صحيحان $r,$ q بحيث أن:

$$a = b\,q + r \quad ، \quad 0 \leqslant r < b$$

الحل:

إثبات صحة العلاقة عندما $a = 1$

إذا كانت $b = 1$ فإن $\quad q = 1 \quad ، \quad r = 0$

إذا كانت $b > 1$ نضع $\quad q = 0 \quad ، \quad r = 1$

$\therefore$ العلاقة صحيحة عندما $a = 1$.

(١) نفترض صحة العلاقة عندما $a = k$ أي أننا نفترض وجود q_0 ، r_0 بحيث أن

$$k = bq_0 + r_0 \quad ، \quad 0 \leqslant r_0 < b$$

(٢) نحاول أن نستخدم ما جاء في (٢) لإثبات صحة العلاقة عنـد القيمة التي تليها أي عند $a = k + 1$.

$$k + 1 = bq_0 + (r_0 + 1) \quad ، \quad 0 \leqslant r_0 + 1 \leqslant b$$

حالة (أ): $\quad r_0 + 1 < b$

نضع $\quad q = q_0 \quad ، \quad r = r_0 + 1$

$$\therefore k + 1 = bq + r \quad ، \quad 0 < r < b$$

حالة (ب):　　$r_0 + 1 = b$

نضع　　$q = q_0 + 1$ ، $r = 0$

$$\therefore k + 1 = bq + 0$$

من الحالة (أ) والحالة (ب) ينتج أن صحة العلاقة عندما $a = k$ تستلزم صحتها عندما $a = k + 1$. ومن نظرية الإستقراء الرياضي ينتج أن العلاقة صحيحة لجميع قيم $a \in N$ التي تحقق $a \geqslant 1$.

١ ـ ٣ تمارين

١ ـ أثبت باستخدام الإستقراء الرياضي:

(a) $$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

(b) $$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(c) $$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+1)}{4(n+1)}$$

٢ ـ أثبت باستخدام الإستقراء الرياضي أن:

(a) $2 \mid (n^2 + n)$

(b) $6 \mid (n^3 + 5n)$

٣ ـ أثبت باستخدام الإستقراء الرياضي أن:

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$$

٤ ـ أثبت بطريقة الإستقراء الرياضي أن:

$$1^2 + 4^2 + 7^2 + \dots + (3n-2)^2 = \frac{n}{2}(6n^2 - 3n - 1)$$

٥ ـ بطريقة الإستقراء الرياضي أثبت صحة المعامل التفاضلي النوني للدوال الآتية:

(a) $$\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax+b}) = a^n e^{ax+b}$$

(b) $$\frac{d^n}{dx^n}\sin x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

(c) $$\frac{d^n}{dx^n}\cos x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

(d) $$\frac{d^n}{dx^n}\operatorname{Log}x = \frac{(n-1)!\,(-1)^{n-1}}{x^n}$$

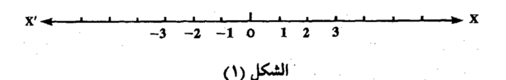
الباب الثاني

الأعداد المركبة

(COMPLEX NUMBERS)

سبق لنا التعرف على الأعداد الحقيقية والتي تشمل الأعداد الصحيحة والكسرية الموجبة والسالبة والصفر والأعداد الجذرية وغير الجذرية، أي الصمّاء، مثل $\sqrt{٣}$، والنسبة التقريبية π وهي التي لا يمكن التعبير عنها كنسبة بين عددين صحيحين. وستتعرف الآن إلى نوع جديد من الأعداد، يسمى بالأعداد المركبة. ومدخلنا إلى هذا النوع من الأعداد التي يمكن أن يتم عن طريق الجبر أو الهندسة.

لقد عرفنا طريقة تمثيل الأعداد الحقيقية بنقاط على خط مستقيم ونتساءل الآن عن نوعية النقاط التي خارج المستقيم وعلى نفس المستوى وعن إمكانية وجود نوع آخر من الأعداد غير الحقيقية طبعاً ليمثل تلك النقاط، إذا اعتبرنا المستقيم الأفقي $X\,O\,X'$ - كما مبين على الشكل (١) حيث O تمثل الأصل والأعداد التي عن يمينها تسمى موجبة والتي عن يسارها، وبالتالي يمكن أن يمثل أيّ عدد ببعد مسافته عن O.



الشكل (١)

يمكننا مقارنة هذا بالمتجهات الخطية، فلو ضربنا متجهاً في إتجاه OX في (١ −) ينتج من ذلك عكس اتجاهه (أي دورانه حول نقطة الأصل بزاوية موجبة

مقدارها ١٨٠). وهذا هو مدخلنا على نوع جديد من الأعداد... فإذا عرّفنا الرمز i بأنه عامل إذا ضرب في عدد حقيقي موجب ينتج منه إدارة البعد الذي يمثل العدد على محور الأعداد الحقيقية حول نقطة الأصل بمقدار زاوية قائمة في الإتجاه الموجب. (كذلك بالنسبة لأيّ متجه في إتجاه OX إذا ضرب في العامل تكون النتيجة إدارة المتجه زاوية قائمة في الإتجاه الموجب).. فلو كان b أي عدد موجب، فإن ib هو متجه ممتد من نقطة الأصل إلى أعلى وطوله b ويسمى عدداً تخيلياً بحتاً (purely imaginary number) ويسمى oy محور الأعداد التخيلية.

٢ ـ ١ تعريف الأعداد المركبة:

تعريف (1)

أي عدد مكتوب على الصورة:

$$x + iy$$

حيث y وx عددان حقيقيان، يسمى عدداً مركباً (Complex number) ويرمز له عادة بحرف واحد مثل z، حيث نكتب:

$$z = x + iy \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

وتكون z مقداراً تخيلياً بحتاً عندما $x = o$ بينما تمثل عدداً حقيقياً إذا كانت $y = o$. وبالتالي فإن الأعداد تخيلية كانت أم حقيقية، ما هي إلا حالات خاصة من الأعداد المركبة.

يتضح مما سبق أنه يمكن تمثيل أي عدد مركب z، كما في (١)، على المستوى بالنقطة (y وx). كذلك العكس أن أي نقطة (y وx) على المستوى تمثل عدداً مركباً، ومن ثم فإنه يسمى مستوى الأعداد المركبة.

إن التعريف أعلاه للأعداد المركبة مبنى على هندسة المستوى ويجب أن لا ننسى أن هنالك طرقاً أخرى يمكن استخدامها كمدخل إلى الأعداد المركبة مثلاً كتعريفها جبرياً عن طريق الأزواج المرتبة.. كذلك يمكن تعريفها كامتداد للأعداد الحقيقية مثلاً عن طريق بحثنا لحل المعادلة:

$$x^2 + 1 = o$$

والتي لا يوجد لها حل في نطاق الأعداد الحقيقية مما قاد إلى نشأة نـوع جديـد من الأعداد والذي أصبح معروفاً باسم الأعداد المركبة..

تعريف (٢):

إذا كان $a + ib$ عدداً مركباً، فـإن a تسمى بالجـزء الحقيقي للعدد المـركب وتسمى b بالجزء التخيلي للعدد المركب.

٢ ـ ٢ خواص الأعداد المركبة:

تعريف (١):

لتعـريف حاصـل جمع عـددين مركبـين $a + bi$، $c + di$، نستخدم قـوانـين الإختصار العادية التي تتبع مثلاً في حالة الكميّات الصّماء حيث:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i$$

تعريف (٢):

يعرف حاصل ضرب عددين مركبين $a + bi$ ، $c + di$ كالتالي:

$$(a + bi)\,(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$$

وبتطبيق قوانين الجبر العادية على الطرف الأيسر نحصـل على الـطرف الأيمن علماً بأن $i^2 = -1$.

مثال (١):

أوجد حاصل الضرب: $(3 + 4i)\,(2 - i)$

الحل:

$$(3 + 4i)\,(4 - i) = 6 - 3i + 8i - 4i^2$$
$$= 6 + 4 + 5i$$
$$= 10 + 5i \qquad (\text{حيث } i^2 = -1)$$

مثال (٢):

إذا كان $z_1 = 2 + 3i$ و $z_2 = 1 - i$

أوجد قيمة كل من:

(i) $z_1 + z_2$,   (ii) $z_1 - 2z_2$,   (iii) z_1z_2 ,   (iv) $z^2{}_1 - 4z_2$

الحل:

(i) $z_1 + z_2 = 2 + 3i + 1 - I = 3 + 2i$

(ii) $z_1 - 2z_2 = 2 + 3i - 2(1 - i) = 5i$

(iii) $z_1z_2 = (2 + 3i)(1 - i) = 2 - 2i + 3i + 3 = 5 + I$

(iv) $z_1 - 4z_2 = (2 + 3i)^2 - 4(i - i) = 4 + 12i - 9 - 4 + 4i$

$= -9 + 16i$

نتيجة:

إذا كان $a + bi$ ، $c + di$ عددين مركبين، فإن:

$$a + bi = c + di$$

إذا وإذا فقط:

$$a = c \quad , \quad b = d$$

ويمكن إثبات ذلك هندسياً، إذ أن النقطة (a , b) تمثل العـدد الأول والنقطة (c , d) تمثل العدد الثاني. فإذا تساوى العددان فيجب أن تنـطبق النقطتـان أي أن:

$$(c , d) = (a , b)$$

وبالتالي فإن:

$a = c \;,\; b = d$ وكذلك العكس صحيح.

تعريف (٥):

إذا كان x , y عددين حقيقيين، فإن العددين المركبين

$$x - iy \quad , \quad x + iy$$

يطلق عليهما اسم عددين مترافقين. وإذا كان $z = x + iy$، فعادة نرمز لمرافق العدد z بالرمز $\overline{z}$ حيث:

$$\overline{z} = x - iy$$

من هذا التعريف يمكننا استنتاج:

$$\text{(i)} \quad x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \qquad \text{(ii)} \quad iy = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$$

$$\text{(iii)} \quad z\overline{z} = x^2 + y^2$$

أي أن حاصل ضرب عددين مترافقين يكون عدداً حقيقياً. . وعادة نستخدم هذه الخاصية في تحويل المقدار الذي على الصورة:

$$\frac{a + bi}{c + di}$$

إلى الصورة القياسية $x + iy$ لأنه بضرب كل من البسط والمقام في مرافق المقام ينتج:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \times \frac{c - di}{c - di}$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{1}{c^2 + d^2}\{(ac + bd) + (bc - ad)i\}$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

وهو المطلوب.

وتستعمل هذه القاعدة عادة في قسمة الأعداد المركبة.

مثال (٣):

ضع المقدار $\frac{5 + 4i}{2 + 3i}$ على الصورة $x + iy$

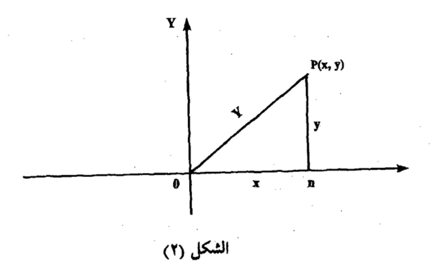
الحل:

$$\frac{5 + 4i}{2 + 3i} = \frac{5 + 4i}{2 + 3i} \times \frac{2 - 3i}{2 - 3i}$$

$$= \frac{(10 + 12) + (8 - 15)\, i}{4 + 9} = \frac{22}{13} - \frac{7}{13}\, i$$

٢ - ٣ التمثيل البياني للأعداد المركبة:

لتعريف التمثيل البياني للعدد المركب ووضعه على الصورة القطبية نستعين بالشكل (٢):



الشكل (٢)

حيث (x,y) ترمز للنقطة P:

$$OP = r \quad , \quad \angle PON = \theta$$

و

$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$ .... (٢)

وبالتالي فإن العدد المركب $z = x + iy$ يعطينا عند التعويض من (٢):

$$z = x + iy$$
$$= r\cos\theta + ir\sin\theta$$
$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

وتسمى r بالقيمة المطلقة أو مقياس الكمية المركبة z.

ويرمز لها عادة بالرمز | z | حيث:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

نلاحظ أن: $z\bar{z} = x^2 + y^2$

ويطلق على r^2 أي مربع القيمة المطلقة، اسم عيار الكمية المركبة.

كما تسمى الزاوية θ بالسعة (أو الإزاحة الزاوية) ويطلق على أصغر قيمة للزاوية θ اسم القيمة الرئيسية لسعة الكمية المركبة وقيمتها التي تحقق هذه الشرط يجب أن تكون:

$$180^\circ \geqslant \theta > -180^\circ$$

تعريف:

نُعَرِّف $\sqrt{-1} = i\sqrt{1}$

بالقيمة الرئيسية للجذر (عندما يكون المجذور سالباً).

وهذا التعريف يجنبنا الخطأ الذي ينتج كما في حالة المثال التالي:

$$\sqrt{-2}\ \sqrt{-3} = i\sqrt{2} \cdot i\sqrt{3} = -\sqrt{6}$$

بينما
$$\sqrt{-2}\ \sqrt{-3} = \sqrt{(-2)(-3)} = +\sqrt{6}$$

مثال (٤):

أوجد القيمة المطلقة والسعة للعدد: $\dfrac{4 + 3i}{2}$

الحل:

نفرض أن:
$$2 + \frac{3}{2}\ i = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta$$
$$\therefore x + 2 ، y = \frac{3}{2}$$
$$r^2 = x^2 + y^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4} \qquad \therefore = \frac{5}{2}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{4}{5} \ ، \ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{5}$$
$$\therefore \theta = 36^\circ\ 2'$$

مثال (٥):

إذا كان:
$$z_1 = x_1 + y_1 i = r_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$$
$$z_2 = x_2 + y_2 i = r_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$$

أوجد حاصل الضرب z_1z_2 على الصورة القطبية.

الحل:

$$z_1z_2 = r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$= r_1 r_2 [\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]$$
$$= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

ومن هذا المثال يتضح لنا أنه في حالة ضرب عددين مركبين يكون الناتج بحيث تساوي سعته مجموع سعتي المضروب والمضروب فيه ومقياس الناتج يعادل حاصل ضرب مقياس المضروب في مقياس المضروب فيه.

٢ ـ ٤ نظرية ديموافر De Moivre's Theorem

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \qquad \text{(١)}$$

لجميع قيم n الصحيحة الموجبة وحيث $i^2 = -1$

البرهان:

نثبت هذه النظرية بطريقة الإستقراء الرياضي:

(i) النظرية صحيحة عندما $n = 1$ بالتعويض.

(ii) نفرض أن النظرية صحيحة في حالة $n = k$ أي:

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^k = \cos k\theta + i \sin k\theta \qquad \text{(٢)}$$

(iii) عندما $n = k + 1$ فإن الطرف الأيسر من (١) يساوي:

من المعادلة (٢)

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i \sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta + i \sin\theta)^k (\cos\theta + i \sin\theta)\\ &= (\cos k\theta + i \sin k\theta)(\cos\theta + i \sin\theta)\\ &= (\cos k\theta \cos\theta - \sin k\theta \sin\theta) + i(\sin k\theta \cos\theta + \cos k\theta \sin\theta)\\ &= \cos (k+1)\theta + i \sin (k+1)\theta\end{aligned}$$

وهذا مساو للطرف الأيمن من (١) إذا عوضنا $n = k + 1$.

(iv) بما أننا أثبتنا صحة النظرية عندما $n = 1$ وأنه إذا كانت النظرية صحيحة عندما $n = k$ فهي أيضاً صحيحة عندما $n = k + 1$ وبالتالي فإن النظرية صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة بطريقة الإستقراء الرياضي.

مثال (٦):

أوجد قيمة $(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)^6$

الحل:

$$(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)^6 = \cos (6 \times 15^\circ) + i \sin (6 \times 15^\circ)$$

(بنظرية ديموافر)

$$= \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ$$

$$= i$$

٢ - ٥ نظرية عن الأعداد المترافقة:

إذا كان w,z عددين مركبين، فإن:

(i) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

(ii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(iii) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

لكل عدد صحيح موجب n.

البرهان:

نفرض أن:

$$z = a + bi ، \quad w = c + di$$

حيث d, c, b, a أعداد حقيقية

$$\text{(i)} \quad z + w = (a + c) + (b + d)\, i$$

$$\overline{z + w} = (a + c) - (b + d)\, i$$

$$= (a - bi) + (c - di) = \overline{z} + \overline{w}$$

$$\text{(ii)} \quad z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)\, i$$

$$\overline{z \cdot w} = (ac - bd) - (ad + bc)\, i$$

$$= (a - bi)\,(c - di) = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

بتعويض $w = z$ في (ii) ينتج :

$$\text{(iii)} \quad \overline{z \cdot z} = \overline{z} \cdot \overline{z}$$

أي أن :

$$= \overline{z^2} = \overline{z}^{\,2}$$

وكذلك يمكن أن نقول:

$$= \overline{z^2 \cdot z} = \overline{z}^{\,2} \cdot \overline{z} = \overline{z}^{\,3}$$

وبتكرار هذه العملية يمكننا إستنتاج أن:

$$\overline{z^n} = \overline{z}^{\,n}$$

لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

٢ ـ ٦ نظرية الجذور:

المعادلة :

$$z^n = \alpha \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١)$$

حيث α أي عدد مركب وn عدد صحيح موجب، لها بالضبط n من الجذور.

البرهان:

نفرض أن

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (٢)$$

و

$$\alpha = s(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (٣)$$

بالتعويض في المعادلة (١) واستعمال نظرية ديموافر ينتج:

$$r^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta) = s(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (٤)$$

ونحصل من هذا على:

$$r^n = s \text{ ، } n\theta = \varphi + 2k\pi \qquad (٥)$$

حيث k عدد صحيح. أي أن:

$$r = s^{\frac{1}{n}} \text{ ، } \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

وبما أن k عدد صحيح، يمكن كتابتها على الصورة

$$k = np + m \text{ ، } \theta \leqslant m \leqslant n \qquad (٦)$$

وبالتالي فإن الزوايا

$$\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \text{ ، } \frac{\varphi}{n} + \frac{2m\pi}{n}$$

تنتهي عند نفس القيم: من هذا نستنتج أن للمعادلة (١) n من الجذور المختلفة (لأن الجذور الأخرى تؤدي إلى تكرار) وهي:

$$s^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right] \right.$$

حيث:

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

مثال (٧):

أوجد قيمة:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

الحل:

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$s = 1 ، \varphi = \frac{\pi}{4} ، n = 3.$$

بالتعويض

$$z_{k+1} = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

$K = 0, 1, 2$ حيث

إذا كانت $k = 0$ فإن:

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} + \frac{i}{\sqrt{13}}$$

إذا كانت $k = 1$ فإن:

$$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= \cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

إذا كانت $k = 2$ فإن:

$$z_3 = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right)$$
$$= \cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12} = -\frac{1}{\sqrt{13}} + i\,\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

مثال (٨):

أوجد حل المعادلة $z^4 - 16 = 0$

الحل:

عندنا: $16 = 16(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi)$

حيث $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

نفرض أن: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

وباستعمال نظرية ديموافر ينتج

$$z^4 = 2^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 16(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi)$$

أي أن:

$$r = 2 \text{ ،} \quad \theta = \frac{2k\pi}{4} = \frac{k\pi}{2}$$

وبالتالي فإن:

$$z = 2\left(\cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}\right)$$

ومنها ينتج أن جذور المعادلة الأربعة هي:

عندما	$k = 0$	$z_1 = 2$
عندما	$k = 1$	$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
عندما	$k = 2$	$z_3 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$
عندما	$k = 3$	$z_4 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

الجذور التكعيبية للوحدة:

تمثل هذه حالة خاصة من المعادلة: $z^n = 1$

حيث نكتفي بإيجاد جذور المعادلة $z^3 = 1$

$$\therefore \quad z^3 = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi \text{ ،} \; k = 0, 1, 2$$

$$\therefore \quad z = \cos\frac{2k\pi}{2} + i\sin\frac{2k\pi}{2} \text{ ،} \quad k = 0, 1, 2$$

أي أن الجذور الثلاثة هي :

$$1, \quad \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \quad ، \quad \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

أو

$$1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \quad ، \quad \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

وإذا استعملنا الرمز ω لمثل الجذر الثاني، أي :

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

نلاحظ أن الجذر الثالث:

$$\frac{+1 + i\sqrt{3}}{2} = \omega^2$$

وبالتالي تصبح الجذور الثلاثة هي :

$$1, \omega, \omega^2$$

ومن المعادلة نلاحظ أن:

$$\omega^3 = 1$$

كما أنه بالتعويض المباشر ينتج :

$$1 + \omega + \omega^2 = 0$$

مثال (٩):

إذا كانت $1, \omega, \omega^2$ تمثل الجذور التكعيبية للوحدة، أثبت أن:

$$(1 + \omega - \omega^2)(1 - \omega + \omega^2) = 4$$

الحل:

بما أن $1 + \omega + \omega^2 = 0$ فإن:

$$1 + \omega - \omega^2 = 1 + \omega - (-1 - \omega) = 2 + 2\omega$$

$$1 - \omega + \omega^2 = 1 - \omega + (-1 - \omega) = -2\omega$$

∴ الطرف الأيسر من المعادلة

$$\begin{aligned}(1 + \omega - \omega^2)(1 - \omega + \omega^2) &= (2 + 2\omega)(-2\omega) \\ &= -4(\omega + \omega^2) \\ &= -4(-1) \\ &= 4\end{aligned}$$

٢ ـ ٧ تمارين

(١) اختصر ما يأتي إلى أبسط صورة:

(i) $(5 - 2i) + (1 - 7i)$

(ii) $(3 - 2i) - (4 - 5i) + (1 - i)\, i$

(iii) $(4 - i)(4 + i) - (1 - 3i)^2$

(iv) $i^6 - i^9$

(٢) أكتب مرافق كل من الأعداد الآتية:

(a) $9 + 2i$ (b) $1 - 5i$ (c) 8 (d) $3i$

(٣) أكتب ما يأتي على الصورة $x + iy$

(i) $\dfrac{1}{3 - 4i}$

(ii) $\dfrac{2 - 7i}{2 + 7}$

(iii) $\dfrac{3 + i}{1 - 3i} + \dfrac{2 - 5i}{1 + 3i}$

(iv) $(1 - i)(1 + i) + \dfrac{2i}{2 - i}$

(٤) إذا كان:

$z_1 = 1 + i$ ، $z_2 = 2 - 3i$

أوجد قيمة كل مما يلي:

(a) $z_1 + 2z_2$ (b) $z^2_1 + z^2_2$ (c) $|\overline{z_1} + z_2|$

(d) $z^3_1 + 3z^2_1 z_2 + 3 z_1 z^2_2 + z^3_3$

(e) $\left| \dfrac{2z_1 - z_2 + 4 + 3i}{z_1 + 2z_2 - 4 + 3i} \right|$

(٥) أثبت أن:

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

(٦) إذا كان b, a عددين حقيقيين و $w = a + ib$ ،

أوجد حل المعادلة: $(x - w)(x - \overline{w}) = 0$

(٧) أوجد العددين الحقيقيين y, x بحيث أن:

$$x + 2iy + ix - 3y = 4i - 1$$

(٨) عبر عن كل مما يأتي في الصورة القطبية:

(a) 3 (b) -5 (c) $2i$

(d) $\dfrac{1}{i}$ (e) $\dfrac{1}{1-i}$ (F) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ (g) $1 - \sqrt{3}i$

(٩) عبر عما يأتي على الصورة $x + iy$

(i) $(\cos 35° + i \sin 35°)(\cos 325° + i \sin 325°)$

(iii) $(\cos 82^\circ + i \sin 82^\circ)(\cos 158^\circ + i \sin 158^\circ)$

(iii) $\dfrac{\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ}{\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ}$

(١٠) أوجد الجذور التكعيبية لكل مما يأتي:

(a) 2 (b) i (c) $4\sqrt{3} + 4i$

(١١) أوجد الجذور التربيعية لكل مما يأتي:

(a) $5 + 12i$ (b) $-(9 + 40i)$

(١٢) حل المعادلة:

$$z^2 + (2i - 3)z + 5(1 - i) = 0$$

(١٣) أوجد حل المعادلة:

$$z^4 - 256 = 0$$

(١٤) إذا كان $1, \omega, \omega^2$ تمثل الجذور التكعيبية للوحدة أثبت أن:

(i) $(1 - \omega)(1 - \omega^2) = 3$

(ii) $(1 - \omega^2 + \omega^4)^2 + (1 + \omega^4 - \omega^5)^2 - 8\omega = O$

(١٥) أوجد كل الجذور الخماسية للوحدة.

الباب الثالث

الدّوال وكثيرات الحدود

FUNCTIONS AND POLYNOMIALS

٣ ـ ١ المعادلة الجذرية الصحيحة: (Rational Integral Equation)

تسمى المعادلة

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad \text{.................} \quad (١)$$

حيث $a_0 \neq 0$، معادلة جذرية صحيحة بالنسبة للمتغير x ودرجتها n. هنا n عدد صحيح موجب. والمعاملات:

$$a_0 , a_1 , a_2 , \dots , a_n$$

ثوابت جذرية حقيقية (أو مركبة).

كثيرة الحدود: Polynomial

كثيرة الحدود في x ودرجتها n حيث n عدد صحيح موجب هي دالة بالنسبة للمتغير x وتكتب عادة على الصورة:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \dots + a_n \quad , \quad a_0 \neq 0 \quad \text{.....} \quad (٢)$$

وجميع معاملاتها $a_0 , a_1 , a_2 , \dots , a_n$ ثوابت.

جذر المعادلة:

أي قيمة من قيم x مثلاً $x = r$ حيث:

$f(r) = 0$ تسمى جـذراً للمعادلـة (١) ويقال r جذر لكثيرة الحدود (٢).

مثلاً:

العدد ٣ يمثل جذراً للمعادلة:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 14x - 3 = 0$$

لأن

$$f(3) = 0$$

٣ ـ ٢ نظرية الباقي: (Remainder Theorem)

باقي قسمة كثيرة الحدود

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n \qquad , a_0 \neq 0$$

على $(x - c)$ يعطى من:

$$R = f(c)$$

البرهان:

نفـرض أن $q(x)$ هو خـارج قسمـة $f(x)$ عـلى $(x - c)$ وأن R هـو البـاقي حيث R مقدار ثابت.

∴ $q(x)$ كثيرة حدود درجتها $(n - 1)$ و

$$f(x) = (x - c)\, q(x) + R \qquad .... (٣)$$

وبوضع $x = c$ في كلا الطرفين من المعادلة ينتج:

$$f(c) = R \qquad .... (٤)$$

٣ ـ ٣ نظرية العامل (Factor Theorm)

كثيرة الحدود $f(x)$ لها عامل $(x - c)$ إذا وإذا فقط:

$$f(c) = 0$$

البرهان:

عندنا من (٣)

$$f(x) = (x - c)\,q(x) + R$$

إذا كان $f(x) = 0$ فإن $R = 0$ أي أن:

$$f(x) = (x - c)\,q(x)$$

ويكون $(x - c)$ عاملاً للمقدار $f(x)$.

وبالعكس إذا كان $(x - c)$ عاملاً للمقدار $f(x)$ فيجب أن يكون $R = 0$ وباستعمال نظرية الباقي ينتج:

$$f(c) = 0.$$

مثال (١):

أوجد باقي قسمة المقدار:

$$x^3 - 5x^2 + 7x + 1$$

على $(x - 2)$

الحل:

باستعمال نظرية الباقي، عندنا:

$$R = f(2) = 8 - 20 + 14 + 1$$

∴ الباقي $R = 3$

مثال (٢):

أثبت أن $(x - 2)$ يمثل عاملاً لكثيرة الحدود:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2.$$

الحل:

بما أن: $f(2) = 8 - 16 + 6 + 2 = 0$

نستنتج من نظرية العامل أن $(x - 2)$ عاملاً للمقدار $f(x)$، كذلك يمكن إثبات هذه النتيجة بالقسمة المباشرة ونثبت أن الباقي صفر.

مثال (٣):

كوّن كثيرة حدود من الدرجة الثالثة ولها أصفار: $(3, 1, -2)$

الحل:

باستخدام نظرية العامل، $f(x)$ لها عوامل:

$$(x + 2), (x - 1), (x - 3)$$

وبالتالي يمكن كتابتها على الصورة: ـ

$$f(x) = k(x + 2)(x - 1)(x - 3) \quad , \quad k \neq 0$$

حيث k ثابت يمكن أن تكون له أي قيمة ما عدا الصفر.

فإذا اخترنا $k = 1$ ينتج:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

مثال (٤):

إذا كان $f(x) = X^6 - 64$ فهل يمثل $(x - 2)$ عاملاً للمقدار $f(x)$؟

الحل:

عندنا $f(2) = 0$

∴ بنظرية العامل $(x - 2)$ يمثل عاملاً للمقدار $f(x)$

مثال (٥):

حلل المقدار:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

إلى عوامل أولية.

الحل:

بالتجربة نجد أن: $f(1) = 0$

∴ $(x - 1)$ عامل من عوامل $f(x)$ ، وبالقسمة المطولة ينتج أن:

$$f(x) \div (x - 1) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

∴ $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

٣ ـ ٤ الدوال المتجانسة:

تعريف:

نقول عن الدالة $f(x, y)$ إنها متجانسة (Homogeneous) من الرتبة n إذا كان:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

فمثلاً:

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$$

دالة متجانسة من الرتبة الثانية.

والدالة

$$f(x, y) = x \sin\left(\frac{y}{x}\right) + y \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

دالة متجانسة من الرتبة الأولى :

(لاحظ أن جميع الحدود لها نفس الدرجة)

٣ ـ ٥ الدوال المتماثلة:

تعريف:

إذا كان :

$$f(x, y) = f(y, x)$$

يقال للدالة $f(x, y)$ أنها متماثلة (Symmetric) بالنسبة إلى x, y

مثلاً:

a^5, b^5 ، $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ مقادير متماثلة بالنسبة إلى a, b

الصور المتماثلة إلى بعض المقادير المتماثلة:

(i) $a(x + y + z)$

مقدار متماثل من الدرجة الأولى في x, y, z

(ii) $a(x^2 + y^2 + z^2) + b(xy + yz + zx)$

تمثل أعم صورة لمقدار متماثل من الدرجة الثانية في x, y, z.

(iii) $a(x^3 + y^3 + z^3) + b\,x^2(y + z) + c\,y^2(z + x) + d\,z^2(x + y) +$
$+ e\,x\,y\,z.$

تمثل الصورة العامة لمقدار متماثل من الدرجة الثالثة في x, y, z.

مثال (٦):

أثبت أن:

$$(x + y)^5 - (x^5 + y^5) = 5\,x\,y\,(x + y)\,(x^2 + x\,y + y^2)$$

الحل:

يمكن إعتبار الطرف الأيسر دالة في x على الصورة:

$$f(x) = (x + y)^5 - (x^5 + y^5)$$

بوضع $x = 0$ نجد أن $f(0) = 0$. وبنظرية العامل فإن x أحد عوامل $f(x)$ وبالمثل y عامل من عوامل $f(x)$ وكما أن $f(-y) = 0$ فإن $(x + y)$ عامل من عوامل $f(x)$، أي أن:

$$f(x) = x\,y\,(x + y)\,g(x) \quad \text{.......} \quad (٥)$$

وبما أن $f(x)$ مقدار متماثل من الدرجة الخامسة فإن $g(x)$ مقدار متماثل من الدرجة الثانية، وحيث تكون على الصورة:

$$g(x) = a\,(x^2 + y^2) + b\,x\,y \quad \text{.......} \quad (٦)$$

من (٥)، (٦) ينتج $f(x) = x\,y\,(x + y)\,\{a\,(x^2 + y^2) + b\,x\,y\}$

وبوضح $x = y = 1$ في طرفي هذه المعادلة ينتج:

$$15 = 2\,a + b \quad \text{.......} \quad (٧)$$

وكذلك بوضع $x = 2\,,\,y = -1$ في طرفيها نحصل على:

$$15 = 5\,a - 2\,b \quad \text{.......} \quad (٨)$$

وبحل (٧)، (٨) آنياً ينتج $a = b = 5$

$$\therefore \quad f(x) = 5\,x\,y\,(x + y)\,(x^2 + y^2 + x\,y)$$

وهو المطلوب

٣ ـ ٦ تمارين

(١) أوجد باقي قسمة كثيرة الحدود

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 6$$

على المقدار $(x - 3)$.

(٢) باستخدام نظرية الباقي أوجد باقي القسمة $f(x)$ على $(x - c)$ حيث:

(i) $f(x) = x^4 - 5x^3 - x^2 + 5 \quad , \quad c = 1$

(ii) $f(x) = x^6 - 3x^4 + 4 \quad , \quad c = 2$

(iii) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1 \quad , \quad c = -1$

(٣) أوجد عوامل المقدار:

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$$

(٤) أوجد جميع قيم k التي تجعل المقدار:

$$x^4 - k^2 x - k + 3$$

له باقي يساوي 4 عند القسمة على $(x - c)$.

(٥) أوجد قيم a, b بحيث يقبل المقدار

$$6x^3 + ax^2 + bx - 2$$

القسمة بدون باقي على:

$$2x^2 + x - 1$$

(٦) أثبت أن $(x + 2)$ أحد عوامل المقدار:

$$f(x) = x^{11} + 2048$$

(٧) أوجد باقي قسمة كثيرة الحدود

$$5x^{97} + 2x^{68} - 3x^{45} - 4$$

على المقدار $(x - 1)$

(٨) أثبت أن المقدار:

$$f(x) = 3x^4 + x^2 + 5$$

ليس له عامل على الصورة $(x - c)$ حيث c عدد حقيقي.

(٩) أثبت أن:

i) $x^n + y^n$ تقبل القسمة على $(x + y)$

إذا كانت n عدداً فردياً

ii) $x^n - y^n$ تقبل القسمة على $(x + y)$

إذا كانت n عدداً زوجياً.

(١٠) حلل المقدار:

$$x^4(y - z) + y^4(z - x) + z^4(x - y)$$

إلى عوامله

(١١) أثبت أن:

$$(x + y)^7 - (x^7 + y^7) = 7xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)^2$$

(١٢) حلل المقدار:

$$(z + y + z)^4 + x^4 + y^4 + z^4 - (x + y)^4 - (y + z)^4 - (z + x)^4$$

(١٣) أثبت صحة المتطابقة

$$\frac{x^3 (y + z)}{(x - y)(x - z)} + \frac{y^3 (z + x)}{(y - z)(y - x)} + \frac{z^3 (x + y)}{(z - x)(z - y)} = y z + z x + x y.$$

(١٤) إذا كان:

$$x + y + z + t = 0$$

أثبت أن:

$$\frac{x^5 + y^5 + t^5}{5} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{2} \times \frac{x^3 + y^3 + z^3 + t^3}{3}$$

الباب الرابع

الكسور الجزئية

(PARTIAL FRACTIONS)

٤ ـ ١ تعريفات:

نبدأ هذا الباب ببعض التعريفات، فلنفرض أن كلاً من:

$$p(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + ... + a_m$$

$$q(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + ... + b_n$$

لكثيرة حدود. حيث: $a_1, ..., a_m$ وَ $b_1, ..., b_n$ ثوابت حقيقية بينها m, n أعداد صحيحة وغير سالبة.

يسمى المقدار الجبري:

$$\frac{p(x)}{q(x)} \qquad .... (3)$$

كسراً جبرياً أو كسراً جذرياً، ويقال للكسر الجذري أنه كسر بحت إذا كانت درجة البسط فيه أقل من درجة المقام أي أن: $m < n$.

ومن دراستنا للإختصار على طريقة إيجاد كسر جذري واحد مساو لمجموع كسرين أو أكثر، نعلم أن:

$$\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-3} = \frac{3x-5}{(x+1)(x-3)}$$

وسنبحث الآن العملية العكسية لذلك، وهي أنه إذا كان لدينا كسر بحت واحد يمكن تحليل مقامه إلى عوامل أولية ومطلوب إيجاد كسور بحتة بسيطة يكون مجموعها الجبري مساو للكسر المعلوم، ويكون لكل منها مقام مساو أحد عوامل مقام الكسر المعلوم. تسمى هذه الكسور: كسور جزئية ويقال لهذه العملية، عملية تحليل كسر معلوم إلى كسور جزئية، وتتوقف عملية التحليل على نوع جذور المعادلة.

كما أنه يشترط في حالة $m \geqslant n$ وقبل البدء في عملية التحليل أن يقسم البسط على المقام على طريقة القسمة المطولة حيث يحصل على كثيرة حدود وكسر بحت.

٤ ـ ٢ طرق إيجاد الكسور الجزئية لكسر بحت معلوم:

توجد أربع حالات مختلفة للكسور البحتة مما يتطلب طريقة خاصة لمعالجة كل حالة على حدة. بما أن $q(x)$ كثيرة حدود ذات معاملات حقيقية فيمكن كتابتها في الصورة العامة التالية:

$$q(x) = (x - a_1) \dots (x - a_n)(x - b_1) \dots (x - b_\ell)^\ell \dots (c_1 x^2 + d_1 x + e_1)$$
$$(c_s x^2 + d_s x + e_s)(u_1 x^2 + v_1 x + w_1) \dots (u_t x^2 + v_t x + w_t)^t$$

حيث كل الثوابت حقيقية والقوى أعداد صحيحة وغير سالبة.

الحالة الأولى:

إذا كانت

$$q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) = \prod_{r=1}^{n} (x - a_r) \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

أي أن جميع عوامل مقام الكسر المعلوم من الدرجة الأولى، حقيقية وغير مكررة.

بما أن الكسر المعلوم بحت، تكون كسوره الجزئية بحتة أيضاً ومقام كـل منها مقدار من الدرجة الأولى، وبذلك يكون البسط في كل من الكسور الجزئية عدداً ثابتاً، وبالتالي ينتج من ذلك المتطابقة:

$$\frac{P(x)}{q(x)} \equiv \sum_{r=1}^{n} \frac{A_r}{(x-a_r)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

أو:

$$P(x) \equiv \sum_{r=1}^{n} \frac{q(x)\,A_r}{(x-a_r)}$$

وبالتعويض $x = a_r$ في الطرفين نحصل على:

$$P(a_r) = A_r (a_r - a_1)(a_r - a_2) \ldots (a_r - a_{r-1})(a_r - a_{r+1}) \ldots (a_r - a_n)$$

$$= A_r f_r (a_r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

حيث

$$f_r(x) = q(x) / (x - a_r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

إذن

$$A_r = P(a_r) / f_r(a_r) \quad , \quad r = 1, 2, \ldots, n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

وتسمى هذه الطريقة لإيجاد الثوابت A_r بطريقة التغطية.

ويمكننا أن نعبر عن (9) بصورة أخرى إذا فاضلنا (8) بالنسبة إلى المتغـير (x) حيث:

$$q(x) = (x - a_r) f_r(x)$$

$$q'(x) = f_r(x) + (x - a_r) f'_r(x)$$

إذن:

$$f_r(a_r) = q'(a_r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

وبالتعويض عنها في (9) نحصل على:

$$A_r = P(a_r) / q'(a_r) \qquad r = 1, 2, \ldots, n$$

إلى جانب هاتين الطريقتين توجد طرق أخرى نتعرض لها جميعاً في المثال التالي:

مثال (١)

حلل الكسر الآتي إلى كسوره الجزئية:

$$\frac{3x^2 - 10x - 2}{2x^3 - 5x^2 + x + 2}$$

الحل:

بتحليل المقام نجد أن له ثلاثة عوامل من الدرجة الأولى، وبالتالي تُناظرها ثلاثة كسور جزئية، بسْط كل منها عدد ثابت.

لذلك نفرض أن:

$$\frac{3x^2 - 10x - 2}{(x-1)(x-2)(2x+1)} \equiv \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{2x+1} \quad \ldots\ldots (12)$$

أو:

$$\frac{\frac{1}{2}(3x^2 - 10x - 2)}{(x-1)(x-2)(x+\frac{1}{2})} \equiv \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots (13)$$

إذا أردنا كتابتها في الصورة (6).

طريقة الحل الأولى:

وهي طريقة التغطية

أولاً: القيم التي تجعل كلاً من المقامات في الطرف الأيمن من (13) يساوي صفراً هي بالترتيب:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1, 2, -\frac{1}{2} \\ \text{أو} \\ a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

وباستعمال قاعدة التغطية:

$$p(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 10x - 2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

و

$$q(x) = (x-1)(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

كما في (13) وبالتعويض في (9) نحصل على:

$$A_1 = \frac{-9/2}{(-1)(3/2)} = 3$$

$$A_2 = \frac{-5}{5/2} = -2$$

$$A_3 = \frac{15/8}{15/4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3x^2 - 10x - 2}{2(x-1)(x-2)(x+\frac{1}{2})} = \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{2x+1}$$

طريقة الحل الثانية:

باستعمال طريقة التفاضل حيث نعوض في المقدار (11). عندنا أولاً من (16):

$$q'(x) = (x-2)(x+\frac{1}{2}) + (x-1)(x+\frac{1}{2}) + (x-1)(x-2)$$
..........(17)

وبالتعويض من (14) في (15) و (17) و (11) نحصل على:

$$A_1 = \frac{-9/2}{(-1)\,3/2} = 3$$

$$A_2 = \frac{-5}{5/2} = -2$$

$$A_3 = \frac{15/8}{15/4} = \frac{1}{2}$$

وهي نفس الإجابات السابقة.

طريقة الحل الثالثة:

نتخلص أولاً من المقام في طرفي المتطابقة (12) حيث نحصل على:

$$3x^2 - 10x - 2 = A_1(x-2)(2x+1) + A_2(x-1)(2x+1) + A_3(x-1)(x-2) \quad \text{.......} \quad (18)$$

وبما أن هذه متطابقة، فإنها تتحقق لكل قيم x ويمكننا إيجاد قيم الثوابت الثلاثة بإعطاء x ثلاث قيم، وأنسبها القيم التي تجعل عوامل مقام الكسر المعلوم صفراً وهي تلك التي في (14) وبوضع هذه القيم في طرفي (18) بالتوالي ينتج:

$$3 - 10 - 2 \equiv -3\,A_1 \qquad \therefore = 3$$

$$12 - 20 - 2 \equiv 5\,A_2 \qquad \therefore A_2 = -2 \quad ,$$

$$\frac{3}{4} + 5 - 2 \equiv \frac{15}{4}\,A_3 \qquad \therefore A_3 = 1 \quad ,$$

وبالتعويض عنها في (12) تنتج نفس الإجابات السابقة.

طريقة الحل الرابعة:

وهي طريقة مقارنة المعاملات للحدود ذات القوة الواحدة للمتغير x في طرفي المتطابقة (12) التي يمكن كتابتها في الصورة:

$$3\,x^2 - 10\,x - 2 = (2\,A_1 + 2\,A_2 + A_3)\,x^2 - (3\,A_1 + A_2 + 3\,A_3)\,x - (2\,A_1 + A_2 - 2\,A_3) \quad \text{.........................} \quad (19)$$

وبمقارنة معاملات x^2 ، x^1 ، x^0 بالترتيب في طرفي المتطابقة ينتج:

$$2\,A_1 + 2\,A_2 + A_3 = 3$$

$$3\,A_1 + A_2 + 3\,A_3 = 10$$

$$2\,A_1 + A_2 - 2\,A_3 = 2$$

وبحل المعادلات الآنية الثلاث ينتج:

$$A_1 = 3 \ , \ A_2 = -2 \ , \ A_3 = 1$$

وهي نفس القيم السابقة.

مثال (٢):

حلل إلى كسور جزئية:

$$\frac{2x^3 + 3\,x^2 - 4\,x + 10}{2\,x^2 + x - 6}$$

الحل:

بما أن الكسر المعلوم كسر مركب يجب تحويله إلى كثيرة حدود وكسر بحت عن طريق القسمة المطولة حيث ينتج:

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - 4x + 10}{2x^2 + x - 6} = x + 1 + \frac{x + 16}{2x^2 + x - 6}$$

ثم يحلل الكسر البحث إلى كسور جزئية . . . فبتحليل المقام يمكننا أن نكتب المتطابقة:

$$\frac{x + 16}{(x + 2)(2x - 3)} \equiv \frac{A_1}{x + 2} + \frac{A_2}{2x - 3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

وبالضرب في مقام الكسر المعلوم تصبح المتطابقة

$$x + 16 \equiv A_1 (2x - 3) + A_2 (x + 2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

ثم نتابع الحل بطريقة التعويض:

فبوضع $x = -2$ في طرفي المتطابقة ينتج:

$$-7A_1 = 14 \qquad \therefore A_1 = -2$$

وبوضع $x = \frac{3}{2}$ ينتج

$$\frac{7A_2}{2} = \frac{35}{2} \qquad \therefore A_2 = 5$$

فيكون:

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - 4x + 10}{2x^2 + x - 6} = x + 1 - \frac{2}{x + 2} + \frac{5}{2x - 3}$$

الحالة الثانية:

إذا احتوى مقام الكسر المطلوب تحليله إلى كسور جزئية على عامل من الدرجة الثانية على الصورة:

$$x^2 + \alpha x + \beta$$

بحيث لا يمكن تحليله إلى عاملين حقيقيين، أي يمكن أن يكتب على الصيغة:

$$(x - c + di)(x - c - di)$$

حيث $i^2 = -1$ ويناظر هذا العامل الكسرين:

$$\frac{A_1}{x - c + di} \quad ، \quad \frac{A_2}{x - c - di}$$

وعند جمعهما ينتج :

$$\frac{E x + F}{(x - c)^2 + d^2}$$

ومن هنا نستنتج أن بسط الكسر البحت المناظر لنوع هذا العامل يكون على الصورة:

$$\frac{E x + F}{x^2 + \alpha x + \beta} \quad \text{..........................} \quad (22)$$

مثال (٣):

حلل إلى كسور جزئية

$$\frac{2x^2 + x + 1}{(x + 2)(x^2 + x + 5)}$$

الحل:

المقـدار: $x^2 + x + 5$ ليس لـه عـوامـل حقيقيـة، فيكـون الكسر المعلوم لكسرين جزئيين كما يلي:

$$\frac{2x^2 + x + 1}{(x + 2)(x^2 + x + 5)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{Bx + c}{x^2 + x + 5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

وبالتخلص من الكسر ينتج:

$$2x^2 + x + 1 \equiv A(x^2 + x + 5) + (Bx + c)(x + 2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

ويمكن ايجاد قيم A، B، C باعطاء x قيم مناسبة كما في الأمثلة السابقة أو بمساواة معاملات قوى x في طرفي المتطابقة:

بوضع $x = -2$، القيمة التي تجعل $x + 2 = 0$، ينتج:

$$7 = 7A \qquad \therefore A = 1$$

وبمساواة معامل x^2 في الطرفين ينتج:

$$2 = A + B \qquad \therefore B = 1$$

وأخيراً بمساواة الحد المطلق (أي بوضع $x = 0$) في الطرفين ينتج:

$$1 = 5A + 2C \qquad \therefore C = -2$$

$$\therefore \quad \frac{2x^2 + x + 1}{(x + 2)(x^2 + x + 5)} \cong \frac{1}{x + 2} + \frac{x - 2}{x^2 + x + 5}$$

مثال (٤):

حلل الكسر الآتي إلى كسور جزئية

$$\frac{2}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)}$$

الحل:

بما أن عاملي المقام من الدرجة الثانية وليست لهما عوامل حقيقية، نفرض أن:

$$\frac{2}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} \equiv \frac{Ax + B}{x^2 - x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} \quad \dots \quad (25)$$

$$2 = (Ax + B)(x^2 + x + 1) + (Cx + D)(x^2 - x + 1)$$

أي:

$$2 = (A + C)x^3 + (A + B - C + D)x^2 + (A + B + C - D)x + (B + D)$$

ثم نساوي معاملات قوى x في الطرفين حيث ينتج

$$\begin{aligned} x^3 &: \quad A + C = 0 \\ x^2 &: \quad A + B - C + D = 0 \\ x^1 &: \quad A + B + C - D = 0 \\ x^0 &: \quad B + D = 2 \end{aligned}$$

وبحل المعادلات الأربع آنياً ينتج:

$$A = -1 \text{ ، } B = C = D = 1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{1 - x}{x^2 - x + 1} + \frac{1 + x}{x^2 + x + 1}$$

الحالة الثالثة :

إذا احتوى مقام الكسر المطلوب تحليله إلى كسور جزئية على عامل من الدرجة الأولى مكرر k من المرات بالصورة:

$$(x + a)^k$$

فسوف تناظره مجموعة k من الكسور الجزئية بالصورة:

$$\frac{A_1}{x+a} + \frac{A_2}{(x+a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x+a)^k} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

ويمكن استنتاج هذه الصورة من الحالة السابقة، فمثلاً إذا كان أحد عوامل المقام $(x + a)^2$ فسوف يناظره:

$$\frac{Ax + B}{(x+a)^2}$$

ويمكن كتابته على الصورة:

$$\frac{A_x + B}{(x+a)^2} \equiv \frac{A_1}{(x+a)} + \frac{A_2}{(x+a)^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

حيث $A_1 = A \quad ، \quad A_2 = B - aA$

لذا فإن العامل $(x + a)^2$ يناظره الكسران الجزئيان كما موضح في الطرف الأيمن من (27) بدلاً عن صورة الطرف الأيسر.

وبوجه عام فإن العامل $(x + a)^k$ تناظره كسور على الصورة (26).

مثال (٥):

حلل $\dfrac{9x^2 - 4x - 8}{(2x-3)(x+1)^2}$ إلى كسور جزئية.

الحل:

نفرض الكسور الجزئية على الصورة:

$$\frac{9x^2 - 4x - 8}{(2x-3)(x+1)^2} \equiv \frac{A}{2x-3} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$9x^2 - 4x - 8 \equiv A(x+1)^2 + B(x+1)(2x-3) + C(2x-3)$$

بوضع $x = -1$ ينتج:

$$5 = -5C \qquad \therefore C = -1$$

بوضع $x = \frac{3}{2}$ ينتج:

$$\frac{25}{4} = \frac{25}{4} A \qquad \therefore A = 1$$

بوضع $x = 0$ ينتج:

$$-8 = A - 3B - 3C \qquad \therefore B = 4$$

مثال (٦):

حلل $\frac{4}{(x+2)x^3}$ إلى كسور جزئية.

الحل:

نفرض $\frac{4}{(x+2)x^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3}$

$$4 \equiv Ax^3 + B(x+2)x^2 + C(x+2)x + D(x+2)$$

بوضع $x = 0$ ينتج $4 = 2D \quad \therefore\ D = 2$

بوضع $x = -2$ ينتج $4 = -8A \quad \therefore\ A = -\frac{1}{2}$

بمساواة معامل x^3 ينتج $A + B = 0 \quad \therefore\ B = \frac{1}{2}$

بمساواة معامل x^2 ينتج $2B + C = 0 \quad \therefore\ C = -1$

$$\frac{4}{(x+2)\,x^3} = \frac{-1}{2\,(x+2)} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

الحالة الرابعة:

إذا احتوى مقام الكسر المطلوب تحليله إلى كسور جزئية على عامل من الدرجة الثانية مكرر k من المرات بالصورة $(x^2 + \alpha x + \beta)^k$.

بحيث لا يمكن تحليل $x^2 + \alpha x + \beta$ إلى عاملين حقيقيين، فسوف تناظره مجموعة k من الكسور الجزئية بالصورة:

$$\frac{A_1 x + B_1}{x^2 + \alpha x + \beta} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + \alpha x + \beta)^2} + \dots + \frac{A_k x + B_k}{(x^2 + \alpha x + \beta)^k}$$

مثال (٧):

حلل الكسر الآتي إلى كسور جزئية:

$$\frac{1 - 2x + x^2}{x\,(x^2 - x + 1)^2}$$

الحل:

نفرض أن: $$\frac{1 - 2x + x^2}{x\,(x^2 - x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$1 - 2x + x^2 \equiv A(x^2 - x + 1)^2 + x(Bx + C)(x^2 - x + 1) + (Dx + E)x$$

بوضع $x = 0$ ينتج : $1 = A \qquad \therefore A = 1$

بمساواة معامل x^4 ينتج : $0 = A + B \qquad \therefore B = -1$

بوضع $x = 1$ ينتج : $0 = A + B + C + D + E$

أو $0 = C + D + E$

بوضع $x = -1$ ينتج : $4 = 9A + 3B - 3C + D - E$

أو $-2 = -3C + D - E$

بوضع $x = 2$ ينتج : $1 = 9A + 12B + 6C + 4D + 2E$

أو $4 = 6C + 4D + 2E$

أو $2 = 3C + 2D + E$

وبحل المعادلات الثلاث آنياً ينتج :

$C = 1 , D = 0 , E = -1$

$$\frac{1 - 2x + x^2}{x(x^2 - x + 1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{1 - x}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

نلاحظ في جميع الحالات التي درسناها أن عدد الثوابت في الكسور الجزئية يساوي درجة مقام الكسر المعلوم.

٤ ـ ٣ تمارين:

حلل ما يأتي إلى كسور جزئية :

(1) $\dfrac{1 + 5x}{(x - 3)(x + 5)}$

(2) $\dfrac{8 + x}{1 + x - 6x^2}$

(3) $\dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

(4) $\dfrac{2\,x^2 + 4x}{(x - 1)\,(2x + 1)}$

(5) $\dfrac{1 + 2x + x^2}{(1 - x^4)}$

(6) $\dfrac{3x^2 + 42x}{(x + 6)\,(x + 1)}$

(7) $\dfrac{1}{(x + 5)\;(x - 5)^2}$

(8) $\dfrac{12x - 4}{(x - 4)\,(x^2 + x - 6)}$

(9) $\dfrac{5x + 4}{(x + 2)^2\,(x + 3)^3}$

(10) $\dfrac{1 + x^2 + x^4}{x^2\,(1 + x^2)^2}$

(11) $\dfrac{x^4}{(1 + x^2)\,(4 + x)\,(9 + x^2)}$

(12) $\dfrac{2\,x^2 - 10}{x^4 + 10x - 9}$

(13) $\dfrac{(x - 1)\,(x + 2)\,(x - 3)\,(x + 4)}{(x + 1)\,(x - 2)\,(x + 3)\,(x - 4)}$

الباب الخامس

المحددات

(DETERMINANTS)

٥ ـ ١ مفكوك المحددة:

إذا أردنا إيجاد نقطة تقاطع المستقيمين:

$$\alpha x + \beta y = c_1 \quad \text{.......................} \quad (1)$$

$$\gamma x + \delta y = c_2 \quad \text{.......................} \quad (2)$$

فإننا نقوم بحل هاتين المعادلتين لإيجاد المجهولين، x, y وباستعمال طريقة الحذف نحصل على:

$$x = \frac{c_1 \delta - \beta c_2}{\alpha \delta - \gamma \beta} \quad ، \quad y = \frac{\alpha c_2 - \gamma c_1}{\alpha \delta - \gamma \beta} \quad \text{..............} \quad (3)$$

إذا كتبنا الكميات $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ على الصورة:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

فيقصد بذلك المقدار الجبري $\alpha \delta - \beta \gamma$ ويكتب:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha \delta - \beta \gamma \quad \text{..........................} \quad (4)$$

ويطلق على الطرف الأيسر اسم محددة كما يسمى الطرف الأيمن: مفكوك المحددة. ومثل هذه المحدَّدة التي تتكون من صفين وعمودين تسمى بالمحددة ذات الدرجة الثانية، كما يسمى $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ عناصر المحددة.

تعريف:

إذا احتوت محددة على n من الصفوف و n من الأعمدة فيطلق عليها محددة ذات الدرجة n.

باستخدام (4) يمكننا وضع قيمتي x, y التي حصلنا عليها في (3) في صورة محددات من الدرجة الثانية على الشكل التالي:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad , \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

حيث:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & \beta \\ c_2 & \delta \end{vmatrix} , \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha & c_1 \\ \gamma & c_2 \end{vmatrix} , \Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \ldots\ldots (6)$$

ويسمى المحدد Δ **بمحدد المعاملات**؛ لأن عموده الأول عبارة عن معاملي x والعمود الثاني يمثل معاملي y وذلك في الطرف الأيسر من المعادلتين (١)، (٢).

كما أن Δ_1، أي بسط x، محدد ناتج من إحلال ثوابت الطرف الأيمن في المعادلتين محل العمود الأول (معاملات x) من محدد المعاملات.

وكذلك Δ_2، أي بسط y، محدد ناتج من إحلال ثوابت الطرف الأيمن في المعادلتين محل العمود الثاني (معاملات y) من محدد المعاملات.

وتعرف هذه الطريقة بقاعدة كرامر Cramer العالم الذي اكتشف استخدام المحددات في حل المعادلات الخطية.

مثال:

أوجد مفكوك المحددات الآتية:

$$(a)\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix},\ (b)\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & \log 10 \\ 2 & \log 5 \end{vmatrix},\ (c)\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} \sec x & \tan x \\ \tan x & \text{sex}\, x \end{vmatrix}$$

الحل:

$$(a)\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 - (2)(-1) = 14$$

$$(b)\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & \log 10 \\ 2 & \log 5 \end{vmatrix} = 3 \log 5 - 2 \log 10 = \log \frac{125}{100} = \log \frac{5}{4}$$

$$(c)\quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \sec x & \tan x \\ \tan x & \sec x \end{vmatrix} = \sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

مثال (٢):

حل المعادلات الآتية باستخدام طريقة المحددات:

$$3x + y = 3$$
$$x + 2y = -4$$

الحل:

إذا كان Δ محدد المعاملات و Δ_1 محدد x، و Δ_2 محدد y، فإن:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad ، \quad , y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

حيث:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 4 = 10$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 3 = -15$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2 \qquad , y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{15}{5} = -3$$

٥ ـ ٢ المحددة ذات الدرجة الثالثة:

تنشأ المحددة ذات الدرجة الثالثة من حل ثلاث معادلات خطية في ثلاثة مجاهيل. بالمحددة تسعة عناصر مرتبة في ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة ومن الطبيعي أن لكل عنصر من العناصر ترتيبين ترتيب الصف، وترتيب العمود، فمثلاً إذا كان:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(7)}$$

فإن العنصر c_2 يقع في الصف الثاني والعمود الثالث من المحددة.

٥ ـ ٣ المحددة الصغرى: (Minor)

المحددة الصغرى (أو المحيدد) بالنسبة لأي عنصر من عناصر محددة الدرجة الثالثة كما في (7) مثلاً عبارة عن محددة من الدرجة الثانية ناتجة من Δ بعد حذف عنصر الصف والعمود الواقع فيهما هذا العنصر.

فمثلاً المحددة الصغرى الناتجـة عن حذف الصف الثـاني والعمود الأول (أي الصف والعمـود اللّذان يلتقيـان عنـد العنصر a_2) تسمى بـالمحـددة الصغـرى المناظرة للعنصر a_2 ويرمز لها بالرمز A_2.

ويمكننا عمل تسع محددات صغرى بالنسبة للمحددة Δ مثلاً:

المحددات الصغرى A_2, B_3.

$$A_2 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad , B_3 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \text{..........} \quad (8)$$

تناظر العناصر a_2, b_3 على الترتيب.

٥ ـ ٤ المتعامل: (Cofactor)

متعامل أي عنصر هو عبارة عن محددته الصغرى مضروبة في $(-1)^n$ حيث n تساوي مجموع ترتيبي الصف والعمود الواقع فيهما هذا العنصر.. فمثـلاً نجد من (7) و (8) أن متعامل العنصر b_3 هو

$$B_3^* = B_3 \times (-1)^{3+2} = -B_3$$

٥ ـ ٥ مفكوك المحددة ذات الدرجة الثالثة:

إن مفكوك المحددة الثالثة (7) يكتب على الصورة:

$$\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

أي أن:

$$\Delta = a_1 A_1^* + b_1 B_1^* + c\, C_1^* \quad \text{..................................} \quad (9)$$

وبما أن

$$A_1^* = A_1 (-1)^{1+1} = A_1$$
$$B_1^* = B_1 (-1)^{1+2} = -B_1$$
$$C_1^* = C_1 (-1)^{1+3} = C_1$$

فإن

$$\Delta = a_1 A_1 - b_1 B_1 + c_1 C_1 \qquad \text{.................................} \quad (10)$$

وكذلك باستخدام الصف الثاني نجد أن

$$\Delta = a_2 A_2^* + b_2 B_2^* + c_2 C_2^*$$

أي أن

$$= -a_2 A_2 + b_2 B_2 - c_2 B_2 \qquad \text{.................................} \quad (11)$$

وهكذا

وبالتالي يمكن إيجاد مفكوك المحددة باستخدام عناصر أي صف، أو أي عمود.

٥ ـ ٦ المحددة ذات الدرجة الرابعة:

نعرف المحددة ذات الدرجة الرابعة بدلالة محددات من الدرجة الثالثة باستعمال نفس الطريقة التي اتبعت في تعريف المحددة ذات الدرجة الثالثة، فإذا كان:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \qquad \text{.............................} \quad (12)$$

فإن:

$$\Delta = a_1 A_1^* + b_1 B_1^* + c_1 C_1^* + d_1 D_1^*$$
$$= a_1 A_1 - b_1 B_1 + c_1 C_1 - d_1 D_1$$

حيث:

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, B_1 = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix},$$

مثال (٣):

أوجد مفكوك المحددات الآتية:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \quad , B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ -5 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} \quad , D = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & 2 \\ 6 & 1 & 6 & 4 \\ -4 & 3 & -4 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$A = 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \times 9 - 5 + (-12) = 1$$

$$B = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 + 5\,(-1) = -1$$

$$C = 2\begin{vmatrix} -1 & 2 & 10 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 10 \\ -5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 3 & -1 & 10 \\ -5 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

وبفك المحددات ذات الدرجة الثالثة نحصل على:

$$C = 2\,(-74) + 3 \times 32 - 258 + 4 \times (-77) = -618$$

$$C = 2\,(-92) - 3\,(-32) - (-258) + 4\,(-77) = -102$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 7 & 7 & 2 \\ 6 & 6 & 4 \\ -4 & -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+ 5\begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 4 \\ -4 & 3 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 6 & 1 & 6 \\ -4 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

وبفك المحددات ذات الدرجة الثالثة نحصل على:

$$D = 5 \times 19 - 8 \times 0 + 5\,(-19) - 0 = 0$$

٥ ـ ٧ خواص المحددات: (Properties of Determinants)

فيما يلي بعض الخواص الأساسية للمحددات، وسنكتفي بإثباتها للمحددات ذات الدرجة الثالثة حيث يمكن استنتاجها مباشرة من تعريف المفكوك الذي

أوردناه في (9). كما يمكن تعميم الإثبات لأي درجة.

أولاً: تبديل الصفوف بالأعمدة لا يغيّر من قيمة المحددة، أي:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

لأن مفكوك الأولى يطابق مفكوك الثانية.

ثانياً: إذا احتوت المحددة على صف (أو عمود) جميع عناصره أصفار، فإن قيمة المحددة تساوي صفراً.

وهذا يتضح من فك المحددة باستخدام ذلك الصف (أو العمود).

ثالثاً: تتغير إشارة المحددة إذا تبادل صفان أو عمودان كلٌ مكان الآخر، فمثلاً:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

وذلك لأننا نحصل على نفس المقدار باستخدام الصف الأول في فك الطرف الأيسر والصف الثاني في فك محددة الطرف الأيمن.

رابعاً: العامل المشترك بين عناصر صف (أو عمود) يكون عاملاً للمحددة، فمثلاً:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ويمكن التحقق من ذلك بفك المحددتين.

خامساً: تنعدم المحددة إذا تطابق صفان (أو عمودان)، فمثلاً:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

وإذا بادلنا الصفين الأولين نحصل على:

$$-\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

حسب الخاصية الثالثة، وبجمع المعادلتين يتضح أن المحددة تساوي صفراً.

سادساً: إذا تناسب صفان (أو عمودان) فإن المحددة تنعدم وهذا يُتبع من الخاصيتين الرابعة والخامسة.

سابعاً: إذا أمكننا التعبير عن كل عنصر من عناصر الصفوف (أو الأعمدة) في محددة مجموع حدين، فإن المحددة الأصلية يمكن التعبير عنها كمحددتين تحتوي عناصرها الجديدة على حد واحد فقط. فمثلاً:

$$\begin{vmatrix} a_1 + p_1 & b_1 + q_1 & c_1 + r_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ويمكن إثبات ذلك بالفك بعناصر الصف الأول. ويلاحظ أن كل حد في مفكوك المحدد في الطرف الأيسر يساوي مجموع الحدين المناظرين له في مفكوك المحددين في الطرف الأيمن.

وبوجه عام إذا تكونت عناصر أي صف أو عمود في محددة من مجموع n من الحدود فإن المحددة تساوي مجموع n من المحددات تحتوي عناصرها الجديدة على حد واحد فقط.

ثامناً: لا تتغير قيمة المحدد إذا أضفنا إلى عناصر أي صف (أو عمود) مضاعفات العناصر المناظرة لصف (أو عمود) آخر، فمثلاً:

$$\begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 & c_1 + kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ويمكن إثبات ذلك باستخدام الخواص أربعة وخمسة وسبعة.

تاسعاً: إذا كان مفكوك المحددة دالة كثيرة حدود في المتغير x، وتطابق صفان (أو عمودان) عندما تكون قيمة $x = a$ فإن الكمية $(x - a)$ تكون عاملاً للمحدّدة.. وهذا ينتج من الخاصية الخامسة للمحددات ومن نظرية الباقي.

مثال (٤):

أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a - b)\,(b - c)\,(c - a) \quad \text{..........} \quad (13)$$

الحل:

من الواضح أن المحددة تنعدم إذا كانت $a = b$ لأنه في هذه الحالة تساوي الصفان الأول والثاني. كذلك تنعدم المحددة إذا كانت:

$a = c$ أو $b = c$

ونظراً لأن كل حد من مفكوك المحددة ثلاثي الحدود كما يتضح من حاصل ضرب حدود القطر (أي الحد الأول في مفكوك المحددة)، وكذلك الحال بالنسبة لمفكوك الطرف الأيمن (13):

$$\Delta = k\,(a - b)\,(b - c)\,(c - a) \quad \text{..........................} \quad (14)$$

حيث k لا تتوقف على c, b, a. ويمكن إيجاد قيمة k بوضع قيم مناسبة لكل من c, b, a في طرفي المعادلة (14).

فمثلاً:

$$c = -1 \ ، \ b = 0 \ ، \ a = 1$$

$$\therefore \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k(-2)$$

أي أن:

$$-2 = k(-2) \qquad \therefore k = 1$$

من (14):

$$\Delta = (a - b)(b - c)(c - a)$$

وهو المطلوب.

٥ - ٨ تفاضل المحددات:

إننا نعرف من جبر المتجهات أنه إذا كان:

$$\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}$$

$$\underline{b} = b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}$$

$$\underline{c} = c_1 \underline{i} + c_2 \underline{j} + c_3 \underline{k}$$

ثلاثة متجهات، فإن الضرب القياسي الثلاثي $(\underline{c} \times \underline{b}) \cdot \underline{a}$ يمكن كتابته على صورة محددة كالآتي:

$$\Delta = \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{.................. (15)}$$

وأنه إذا كان:

$$\underline{a} = \underline{a}\ (t) \quad , \quad \underline{b} = \underline{b}\ (t) \quad , \quad \underline{c} = \underline{c}\ (t)$$

فإن:

$$\frac{d\,\Delta}{d\,t} = \frac{d\,\underline{a}}{d\,t} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) + \underline{a} \cdot \left(\frac{d\,\underline{b}}{d\,t} \times \underline{c}\right) + \underline{c} \cdot \left(\underline{b} \times \frac{d\,\underline{c}}{d\,t}\right) \quad \text{.. (16)}$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{d\,\Delta}{d\,t} = \dot{\Delta} = \begin{vmatrix} \dot{a}_1 & b_1 & c_1 \\ \dot{a}_2 & b_2 & c_2 \\ \dot{a}_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & \dot{b}_1 & c_1 \\ a_2 & \dot{b}_2 & c_2 \\ a_3 & \dot{b}_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dot{c}_1 \\ a_2 & b_2 & \dot{c}_2 \\ a_2 & b_2 & \dot{c}_3 \end{vmatrix} \quad \text{............................. (17)}$$

حيث النقطة فوق المقدار تعني تفاضله بالنسبة للمتغير t.

وبصورة عامة إذا كان:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\frac{d\Delta}{dt} = \begin{vmatrix} \dot{a}_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dot{a}_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{a}_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nb} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \dot{a}_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \dot{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & \dot{a}_{nn} \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

مثال (٥):

أوجد معامل تفاضل المحددة Δ بالنسبة للمتغير x حيث:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+x+x^2 & 1+2x & -x^2 \\ 1-x+x^2 & -1+2x & 1-x^2 \\ 1+x-x^2 & 1-2x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\frac{d\Delta}{dx} = \begin{vmatrix} 1+2x & 1+2x & -x^2 \\ -1+2x & -1+2x & 1-x^2 \\ 1-2x & 1-2x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1+x+x^2 & 2 & -x^2 \\ 1-x+x^2 & 2 & 1-x^2 \\ 1+x-x^2 & -2 & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1+x+x^2 & 1+2x & -2x \\ 1-x+x^2 & -1+2x & -2x \\ 1+x-x^2 & 1-2x & 2x \end{vmatrix} = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \cdots\cdots (19)$$

حيث $\Delta_1 = 0$ لتساوي العمودين الأول والثاني. و Δ_2:

$$r_1 + r_3, \quad r_2 + r_3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1+x+x^2 & 2 & -x^2 \\ 1-x+x^2 & 2 & 1-x^2 \\ 1+x-x^2 & -2 & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2+2x & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1+x-x^2 & -2 & 1+x^2 \end{vmatrix} = (-1)^5 (-2) (4 + 4x + 2)$$

$$\therefore \Delta_2 = 4 + 8x$$

$$r_2 + r_3 , r_2 + r_3$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1+x+x^2 & 1+2x & -2x \\ 1-x+x^2 & -1+2x & -2x \\ 1+x-x^2 & 1+2x & 2x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2+2x & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1+x-x^2 & 1-2x & 2x \end{vmatrix} = -8x$$

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 4$$

* (حيث r_i تشير إلى الصف i و r هي اختصار كلمة row. كما أننا نستعمل c_j كرمز للعمود j و c هي اختصار لكلمة column).

ملحوظة:

في المثال السابق استخدمنا بعض خواص المحددات لفك المحددة وبصفة عامة يمكن استخدام خواص المحددات في تبسيط العمليات الحسابية الخاصة بإيجاد قيمة المحددة. يستحسن دائماً جعل جميع عناصر أحد صفوف (أو أعمدة)

المحددة أصفاراً باستثناء عنصر واحد، ثم نوجد مفكوك المحددة بمعلومية هذا الصف (أو العمود).

مثال (٦):

باستخدام خواص المحددات أوجد قيمة المحددة الآتية:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$c_2 - c_1 \ ، \ c_3 - c_1 \ ، \ c_4 - c_1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} \quad c_2 - 2c_1, \ c_3 - 3c_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1$$

٥ ـ ٩ طريقة الحذف:

إذا نظرنا إلى المعادلات الآتية المتجانسة ذات الدرجة الأول في z, y, x

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

فإننا نجد أن لهذه المعادلات حلاً ظاهراً هو:

$$z = 0 \quad ، \quad y = 0 \quad ، \quad x = 0$$

وللبحث عن حل آخر، نقسم المعادلات الثلاث على z ثم نكتب:

$$\frac{x}{z} = p \quad ، \quad \frac{y}{z} = q \qquad \ldots\ldots\ldots (21)$$

حيث تصبح المعادلات (20)

$$\left.\begin{array}{l} \text{(i)} \ldots a_1p + b_1q + c_1 = 0 \\ \text{(ii)} \ldots a_2p + b_2q + c_2 = 0 \\ \text{(iii)} \ldots a_3p + b_3q + c_3 = 0 \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots (22)$$

وبذا يتبقى مجهولان فقط هما q,p وبإيجادهما من (i), (ii) ثم بالتعويض عنهما في (iii) ينتج:

$$a_1 A_1 - b_1 B_1 + c_1 C_1 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (23)$$

حيث:

$$A_1 = b_2c_3 - b_3c_2 \quad ، \quad B_1 = a_2c_3 - a_3c_2 \quad ، \quad C_1 = a_1b_2 - a_2b_1$$

أي أن (23) يمكن كتابتها على الصورة:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (24)$$

وبالتالي يمكن التعبير عن نتيجة عملية الحذف (وهي التي تمثل الشرط اللازم لوجود حل آخر للمعادلات (20) غير الحل الظاهر) بوضع معاملات z, y, x في شكل محددة قيمتها صفر كما في (24).

مثال (٧):

إحذف z, y, x من المعادلات الآتية:

$$\left.\begin{aligned} ax + hy + gz &= 0 \\ hx + by + fz &= 0 \\ gx + fy + cz &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{.....................................} \quad (25)$$

الحل:

نتيجة الحذف هي:

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$

أي

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

مثال (٨):

باستخدام خواص المحددات أوجد قيمة المحددة

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1982 & 1983 & 1984 \\ 1985 & 1986 & 1987 \\ 1988 & 1989 & 1990 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1982 & 1983-1982 & 1984-1982 \\ 1985 & 1986-1985 & 1987-1985 \\ 1988 & 1989-1988 & 1990-1988 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1982 & 1 & 2 \\ 1985 & 1 & 2 \\ 1988 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1982 & 1 & 1 \\ 1985 & 1 & 1 \\ 1988 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 0 = 0$$

٥ ـ ا استعمال المحددات في حل المعادلات الآنية:

لقد سبق أن تطرقنا إلى حل معـادلتين آنيتـين خطيتـين باستخـدام المحددات ويمكن تعميم هذه الطريقة (قاعدة كرامر).

لحل n من المعادلات الخطية في n من المجاهيل وسوف نكتفي الآن بتطبيقها لحل ثلاث معادلات خطية.

اعتبر المعادلات:

$$\left.\begin{array}{l} \text{(i)} \ldots a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ \text{(ii)} \ldots a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ \text{(iii)} \ldots a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

نفرض أن Δ هي محدد المعاملات حيث:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

وكما سبق أن بينا فإن محدداتها الصغرى هي: A_1 ، A_2 ، A_3 ، ... ، C_3

وبضرب المعادلات (i), (ii), (iii) في A_1 ، A_2 ، A_3 على الترتيب وجمعها ينتج:

$$(a_1A_1 - a_2A_2 - a_3A_3)\,x - (b_1A_1 \ldots b_2A_2 - b_3A_3)\,y$$

$$-\,(c_1A_1 - c_2A_2 + c_3A_3)\,z = d_1A_1 - d_2A_2 + d_3A_3$$

أي:

$$x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+\,z \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_1 & b_1 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & b_1 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

وبما أن كلا من معاملي z, y يساوي صفراً فإن:

$$\frac{x}{\Delta_1} = \frac{1}{\Delta} \quad \text{...} \quad (26)$$

حيث:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$\frac{y}{\Delta_2} = \frac{1}{\Delta} \quad ، \quad \frac{z}{\Delta_3} = \frac{1}{\Delta}$$

حيث Δ_1 ، Δ_2 ، Δ_3 ينتج من إحلال عمود الحدود المطلقة d_1 ، d_2 ، d_3 مكان عمود معاملات x ، y ، z على الترتيب، شرط أن تكون المقادير d_1 ، d_2 ، d_3 في الطرف الأيمن من المعادلات الثلاث، كما هو موضح في (25). ويمكننا الآن أن نكتب حل المعادلات (25) على الصورة:

$$\frac{x}{\Delta_1} = \frac{y}{\Delta_2} = \frac{z}{\Delta_3} = \frac{1}{\Delta} \quad \text{.................................} \quad (27)$$

مثال (٨):

حل المعادلات التالية باستعمال المحددات:

$$4x - 3y + z + 5 = 0$$
$$3x - y = 2z + 1$$
$$x - 2y = z$$

الحل:

أولاً: ترتب المعادلات بحيث تكون المقادير الثابتة وحدها في الطرف الأيمن من المعادلات الثلاث.

$$4x - 3y + z = -5$$
$$3x - y - 2z = 1$$
$$x - 2y - z = 0$$

ثم باستعمال صورة كرامر نحصل على:

$$\frac{x}{\Delta_1} = \frac{y}{\Delta_2} = \frac{z}{\Delta_3} = \frac{1}{\Delta} \qquad \text{.......................} (28)$$

حيث:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -20$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 7 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -20 , \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 3 & 7 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -40, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 60$$

ومن هذا ينتج:

$$\frac{x}{-20} = \frac{y}{-40} = \frac{3}{60} = \frac{1}{-20}$$

$$x = 1 \ ، \ y = 2 \ ، \ z = -3$$

(٥ ـ II) استعمال المحددات في حل المعادلات الخطية غير المتجانسة:

نظرية كرامر (Cramer's Rule)

نعتبر مجموعة المعادلات الخطية في n من المجاهيل:

$$
\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

نضع

$$
\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
\Delta_x = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots b_1 \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots b_2 \dots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots b_n \dots a_{nn} \end{vmatrix}
$$

حيث Δ_{x_i} نحصل عليها من Δ بأن نضع

$$
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

في العمود رقم i من المحدد Δ.

إذا كان $\Delta \neq 0$ فإن:

$$
x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad , \quad i = 1, 2, \dots , n
$$

٥ ـ ١٢ تمارين

(١) فك المحددات الآتية:

$$(a)\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}, \quad (b)\begin{vmatrix} x+1 & x+3 \\ x+2 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$(c)\begin{vmatrix} p & r & q \\ q & p & r \\ r & q & p \end{vmatrix}, \quad (d)\begin{vmatrix} x & u & -w \\ -u & y & v \\ w & -v & z \end{vmatrix}$$

(٢) أوجد قيمة المحددات الآتية:

$$(a)\begin{vmatrix} 8 & 83 & 61 \\ 4 & 37 & 29 \\ 6 & 53 & 43 \end{vmatrix}, (b)\begin{vmatrix} 9 & 3 & 15 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}, (c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -5 & 3 & 4 \\ 7 & -9 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 10 & 5 \\ 4 & 1 & 20 & 10 \end{vmatrix}, \quad (e)\begin{vmatrix} 11 & 10 & 15 & 6 \\ 12 & 17 & 38 & 11 \\ 8 & 21 & 19 & 8 \\ 1 & & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(f)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(٣) بدون استخدام مفكوك المحدد أثبت أن:

$$(a)\begin{vmatrix} 1 & q & p+r \\ 1 & p & r+q \\ 1 & r & q+p \end{vmatrix} = 0, \quad (b)\begin{vmatrix} a & a^2 & (b+c) \\ b & b^2 & (c+a) \\ c & c^2 & (a+b) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

(٤) أوجد قيمة المحددات الآتية:

$$\text{(a)}\begin{vmatrix} u+v & w & w \\ u & v+w & u \\ v & v & w+u \end{vmatrix} \quad , \text{(b)}\begin{vmatrix} x^2+y^2 & zx & yz \\ zx & y^2+z^2 & xy \\ yz & xy & z^2+x^2 \end{vmatrix}$$

حيث:

$$\text{(c)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos 2x & \cos 2y & \cos 2z \\ \sin 2x & \sin 2y & \sin 2z \end{vmatrix} \quad , \text{(d)}\begin{vmatrix} 0 & 1-i & 1-2i \\ 1+i & 0 & 2+3i \\ 1+2i & 1-3i & 0 \end{vmatrix} \quad (i^2 = -1)$$

(٥) أوجد قيمة b, a بحيث يكون:

$$\begin{vmatrix} x & b & a \\ a & x & b \\ b & a & x \end{vmatrix} = x^3 + 3x$$

(٦) أوجد قيمة x إذا كان:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3-x & b^3-x & c^3-x \end{vmatrix} = 0$$

(٧) أثبت أن نتيجة حذف r, q, p من المعادلات:

$$p+\ell(q-r) = 0 \quad ,q + m(p-r) = 0 \quad , r + n(p-q) = 0$$

هي:

$$\ell m + m n + n \ell + 1 = 0$$

حل المعادلة:

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2-x & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3-x & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4-x \end{vmatrix} = 0$$

(٩) أثبت أن $x=1$ جذر للمعادلة:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 3 & 3 \\ 3 & x+4 & 5 \\ 3 & 5 & x+4 \end{vmatrix} = 0$$

ثم أوجد الجذرين الآخرين.

(١٠) احسب مشتقة كل من المحددات التالية بالنسبة للمتغير x.

(i) $\begin{vmatrix} 1+2x & 1+x+6x^2 \\ 3+x & x+3x^2 \end{vmatrix}$, (ii) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$, (iv) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ x^2 & 2x+1 & x^3 \\ 0 & 3x-2 & x^2+1 \end{vmatrix}$

(١١) حل المعادلات التالية باستخدام المحددات:

(i) $3x + y = 5$
$2x - 3y = -4$
, (ii) $2x - y = 1$
$3x - 2y = 26$

(iii) $4x - 2y = 3b$
$x + y = 3a + 2b$
, (iv) $2x + y = 8$
$-5x + 3y + 13 = 0$

(١٢)   حل المعادلات الآتية:

$$a^3 x + a^2 y + az = 1 + a^4$$
$$3a^2 x + 2ay + z = 4a^3$$
$$6a^2 x + ay - z = 14a^3$$

حيث $a \neq 0$

(١٣)   حل المعادلات التالية باستخدام المحددات:

(a) $2x - 3y - 4x = -11$
$4x - 9y + 16z = -53$
$8x - 27y + 64z = -215$

, (b) $3x - y - z = 0$
$x - z = 3$
$2x - y - z = 1$

(c) $2x - y - 2 = 0$
$3y + 2x - 16 = 0$
$5x - 3z - 21 = 0$

, (d) $x + 2y - z = 7$
$x - y + 3z = -7$
$3x + 4y - 2z = 15$

الباب السادس

المصفوفات

(MATRICES)

٦ - ١ تعريفات:

إذا كتبت أعداداً أو كميات داخل أقواس على الصورة:

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} a & f & 9 & b \\ h & b & n & c \\ g & f & v & a \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

يسمى كل منها مصفوفة (Matrix) وهي عبارة عن مجموعة من العناصر وتتكون المصفوفة من صفوف وأعمدة.

(١) تمثل مصفوفة ذات صف واحد (Row Matrix) به أربعة عناصر وتسمى مصفوفة من الدرجة 1×4 وتسمى أيضاً متجهة.

(٢) تمثل مصفوفة من صفين وعمودين وتسمى مصفوفة مربعة Square Matrix وفي هذه الحالة يكتب (2-Square Matrix).

(٣) تمثل مصفوفة من ثلاثة صفوف وأربعة أعمدة وتسمى مصفوفة من الدرجة 3×4 وهي مصفوفة مستطيلة Rectangular Matrix.

(٤) تمثل مصفوفة ذات عمود واحد وتكون مصفوفة من الدرجة 4×1 (Column Matrix) أربعة عناصر.

(٥) تمثل مصفوفة من أربعة صفوف وعمودين وتسمى مصفوفة من الدرجة 4×2.

وبصورة عامة إذا كان بمصفوفة m من الصفوف و n من الأعمدة تكون درجتها $m\times n$ وإذا كان $m=n$ تصبح درجتها n وتسمى n-Square Matrix.

للتعرف على موضع أي عنصر في المصفوفة يمكن كتابتها على الصورة.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

حيث يرمز A للمصفوفة ودليل أي عنصر a_{ij} يتكون من رقمين.

تشير i ,j إلى ترتيب الصف وإلى ترتيب العمود بالنسبة لموقعه في المصفوفة فمثلاً a_{23} ترمز للعنصر الواقع في الصف الثاني وعلى العمود الثالث. كما يمكن كتابته A في الصورة المختصرة:

$$A = [a_{ij}]$$

حيث $(i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, 4)$.

٦ ـ ٢ بعض أنواع المصفوفات:

لقد سبق أن تعرفنا من قبل على المصفوفة المربعة والمصفوفة المستطيلة والمصفوفة ذات الصف الواحد أو ذات العمود الواحد وهنالك أنواع أخرى منها:

المصفوفة المتماثلة : Symmetric Matrix

المصفوفة المتماثلة هي مصفوفة مربعة بحيث :

$$a_{ij} = a_{ji}$$

لجميع قيم i , j فالمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 5 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

مصفوفة متماثلة من الدرجة الثالثة .

المصفوفة الصفرية : Zero Matrix

هي عبارة عن مصفوفة جميع عناصر أصفار ويرمز لها بالرمز 0 فمثلاً :

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ، 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , 0 = [0 \quad 0 \quad 0]$$

مصفوفات صفرية

المصفوفة القطرية : Diagonal Matric

مصفوفة مربعة درجتها n بحيث عناصرها :

$$d_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

فإنها تسمى مصفوفة قطرية ذات الدرجة n.

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

تمثل مصفوفة قطرية من الدرجة الثالثة .

مصفوفة الوحدة: Identity (Unit) Matrix

هي عبارة عن مصفوفة قطرية بحيث كل عنصر في القطر يساوي واحداً. ومصفوفة الوحدة تناظر الواحد في جبر الأعداد ويرمز لها بالرمز I، مثلاً المصفوفة:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تمثل مصفوفة وحدة من الدرجة الرابعة.

مصفوفة المثلث العلوي: Upper Trianguler Matrix

إذا كانت $U = [u_{ij}]$

مصفوفة مربعة بحيث $(i > j)$ $u_{ij} = 0$

فإنها تسمى مصفوفة مثلث علوي، ومثال ذلك:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

وهي مصفوفة مثلث علوي من الدرجة الثالثة.

مصفوفة المثلث السفلي Lower Triangular Matrix

إذا كانت $L = [b_{ij}]$

مصفوفة بحيث:

$$b_{ij} = 0 \quad (i < j)$$

فإنها تسمى مصفوفة مثلث سفلي، ومثال ذلك:

$$L = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

وهذه مصفوفة مثلث سفلي من الدرجة الخامسة.

المصفوفة الموافقة: Conjugate Matrix

إذا كانت A مصفوفة بها عناصر من أعداد مركبة فإن المصفوفة التي تنتج عند استبدال كل عنصر في A بآخر يمثل العدد المرافق له تسمى المصفوفة المرافقة للمصفوفة A ويرمز لها بالرمز $\overline{A}$.

فمثلاً.

إذا كانت المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2-i & 7 \\ 5 & 1+3i \\ 3+2i & 1 \\ -4i & 6-8i \end{bmatrix}$$

حيث $i^2 = -1$ فالمصفوفة المرافقة لها هي:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2+i & 7 \\ 5 & 1-3i \\ 3-2i & 1 \\ 4i & 6+8i \end{bmatrix}$$

المصفوفات المتساوية: Equal Matrices

إذا كان $A = [a_{ij}] \quad , \quad B = [b_{ij}]$

مصفوفتين فيقال إنهما متساويتـان إذا وإذا فقط كانت درجتهـما متساويـة وكان كل عنصر في أحدهما مساوياً للعنصر الذي يناظره في الأخرى. أي أن

$$A = B$$

إذ وفقط إذا:

$$a_{ij} = b_{ij}$$

لجميع توافيق i, j المتاحة.

المصفوفة المحورة: Traspose Matrix

إذا كانت

$$A = [a_{ij}]$$

مصفوفة فإن المصفوفة التي تنتج من تبديل صفـوفها إلى أعمـدة بحسب ترتيبهـا تسمى المصفوفة المحوَّرة ويرمز لها بالرمز

$$A^T \quad \text{أو} \quad \underline{A'}$$

حيث

$$A' = [a_{ji}]$$

لاحظ أنه إذا كانت $m \times n$ درجة المصفوفـة A فإن درجـة المصفوفـة المحوَّرة A' هي $n \times m$. مثلاً إذا كان:

$$A = [2 \quad -3 \quad 5] \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \quad , C = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 3 \end{bmatrix}$$

فإن:

$$A' = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C' = [x \quad y \quad 3]$$

٦ ـ ٣ بعض عمليات المصفوفات: Matrix Operations

سنستفيد من التعريفات التي أوردناها لدراسة بعض عمليات المصفوفات مثل جمع وضرب المصفوفات، ولنبدأ أولاً بعملية جمع المصفوفات.

جمع المصفوفات: Matrix Addition

تطبق عملية الجمع في المصفوفات بالطريقة التي عرفناها في علوم الحساب والجبر. يتحتم إجراء جمع مصفوفتين أن يكون لهما نفس الدرجة عندئذ يقال أن لهما صلاحية أو قابلية الجمع.

مجموع مصفوفتين A , B درجتهما m×n عبارة عن مصفوفة C بنفس الدرجة وعناصرها عبارة عن مجموع العناصر المناظرة في هاتين المصفوفتين، أي أنه إذا كان

$$A = [a_{ij}], \quad B = [b_{ij}], \quad C = [c_{ij}]$$

$$C = A + B$$

فإن العنصر: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$i = 1, 2, \ldots, m \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

ومن البديهي أن الطرح يتم بنفس الطريقة فمثلاً إذا كان:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

فإن:

$$(1)\quad A + B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 8 \\ 12 & 5 & 15 \end{bmatrix}$$

$$(2)\quad A - B = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3)\quad B - A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A + A + A + A = \begin{bmatrix} -20 & 16 & 12 \\ 4 & 8 & 28 \\ 24 & 4 & 32 \end{bmatrix}$$

نلاحظ في (A) و (B) أن كل عنصر في (4) يساوي أربع مرات نظيره في (A) وبصفة عامة إذا كان:

$$A = [a_{ij}]$$

و k أي كمية قياسية حقيقية فإن:

$$k\,A = [ka_{ij}]$$

المصفوفة القياسية: Scalar Matrix

إذا كانت A مصفوفة قطرية بحيث أن جميع عناصرها القطرية متساوية فيطلق عليها اسم المصفوفة القياسية. أي أنه إذا كانت:

$$A = [a_{ij}], \qquad \begin{cases} a_{ij} = 0 & i \neq j \\ a_{ij} = k, & i = j \end{cases}$$

فإن:
$$A = k\,I$$
حيث k كمية قياسية و I هي مصفوفة الوحدة.

قانون التبديل: Commutative Law

ولإثبات قانون التبديل في حالة جمع المصفوفات، نفرض أن:

$$A = [a_{ij}] \quad , \quad B = [b_{ij}]$$

مصفوفتان، فإن:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]\,, B + A = [b_{ij} + a_{ij}]$$

لذلك فإن العنصر $a_{ij} + b_{ij}$ يناظره العنصر $b_{ij} + a_{ij}$ وبما أننا نعلم من قانون التبديل في جبر الأعداد أن:

$$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$$

فإنه يتبع من ذلك أن:

$$A + B = B + A$$

وبنفس الطريق يمكننا إثبات قانون (Associative Law) في حالة جمع المصفوفات. فإذا كان A, B, C ثلاث مصفوفات درجتها واحد فإن:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

ضرب المصفوفات: Matrix Multiplication

يتحتم في عملية ضرب مصفوفتين A, B حسب الترتيب: AB أن يكون عدد أعمدة المصفوفة A مساوياً لعدد صفوف المصفوفة B. فإذا كانت $m \times n$ درجة المصفوفة A فإنه يتحتم أن تكون درجة المصفوفة B على الصورة $n \times p$ وبالتالي إذا كانت المصفوفة C مساوية لحاصل الضرب أي أن:

$$C = AB$$

فتكون درجة المصفوفة C هي m×p. هذا وإذا كان:

$$A = [a_{ij}] , B = [b_{ij}] , C = [c_{ij}]$$

فإن:

$$C_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ip} b_{pi}$$

ويمكن كتابتها بالصورة:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{P} a_{ik} b_{kj}$$

لنبدأ أولاً بضرب مصفوفة A ذات صف واحد في المصفوفة B ذات عمود واحد وبكل منهما n من العناصر، فإن:

$$AB = [a_1 a_2 \dots a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_n \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [a_1 b_1 + \dots + a_n b_n]$$

$$= \sum_{r=1}^{n} a_r b_r$$

مثلاً:

$$[2 \quad -1 \quad 3] \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = [2\times8 - 6+3] = [13]$$

أي أن حاصل ضرب المصفوفتين عدد قياسي.

وإذا كان:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} ، \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

فإن :

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

وإذا كان :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

فإن :

$$C = AB = \begin{bmatrix} (3\times4-2\times1+0\times0) & (3\times2+2\times3+0\times8) \\ (4\times4-1\times1+2\times0) & (4\times2+1\times3+2\times8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 15 & 27 \end{bmatrix}$$

بينما

$$D = BA = \begin{bmatrix} (4\times3+2\times4) & (4\times2+2\times1) & (4\times0+2\times2) \\ (-1\times3+3\times4) & (-1\times2+3\times1) & (-1\times0+3\times2) \\ (0\times3+8\times4) & (0\times2+8\times1) & (0\times0+8\times2) \end{bmatrix}$$

أي أن :

$$D = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 4 \\ 9 & 1 & 6 \\ 32 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن :

$$C \neq D$$
$$AB \neq BA$$

وهذا يعني أن قانون التبديل، بصفة عامة لا ينطبق في حالة ضرب المصفوفات. غير أنه يمكن ذلك في بعض الحالات الخاصة، مثلاً إذا كان :

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad , I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن :

$$AI = IA = A$$

وهذا ينطبق لجميع المصفوفات المربعة في حالة ضربها في مصفوفة الوحدة وهنالك أمثلة أخرى غير هذه الحالة، مثلاً إذا كان :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

فإن :

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وكذلك إذا كان :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad , B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

فإن :

$$AB = BA = \begin{bmatrix} -7 & -6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

٦ ـ ٤ معكوس المصفوفة Inverse Matrix

تعريف : مصغر العنصر a_{ij} في المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

هو المصفوفة الناتجة من المصفوفة A بعد حذف الصف رقم i والعمود j ويرمز له عادة بالرمز M_{ij}. فمثلاً مصغر العنصر a_{33} في المصفوفة A هو:

$$M_{33} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

تعريف:

متعامل العنصر a_{ij} هو محددة مصغر العنصر a_{ij}، أي $|M_{ij}|$ مضروباً في $(-1)^{i+j}$.

تعريف: يعرف معكوس المصفوفة A ويرمز له بالرمز A^{-1} كالتالي:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \ \text{Adj}A$$

حيث $|A|$ هي قيمة المحددة المناظرة للمصفوفة A، AdjA هي المصفوفة المتعاملة للمصفوفة A وتُعرف على أنها صفوف مصفوفة العوامل المرافقة لعناصر المصفوفة A.

لإيجاد معكوس المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

نتبع الخطوات التالية:

١ ـ نوجد $|A|$ ويشترط أن يكون $|A| \neq 0$.

٢ ـ نفرض أن $A_1^*, A_2^*, A_3^*, B_1^*, \ldots$ مرافقات العناصر $a_1, a_2, a_3, b_1, \ldots$

٣ ـ نكون مصفوفة العوامل المرافقة:

$$\begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* & A_3^* \\ B_1^* & B_2^* & B_3^* \\ C_1^* & C_2^* & C_3^* \end{bmatrix}$$

٤ ـ نوجد صفوف المصفوفة بالعوامل المرافقة والتي تسمى المصفــوفة المرافقة للمصفوفة A أي أن:

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} A_1^* & B_1^* & C_1^* \\ A_2^* & B_2^* & C_2^* \\ A_3^* & B_3^* & C_3^* \end{bmatrix}$$

٥ ـ نحسب قيمة A^{-1} كما يلي:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ Adj } A$$

نلاحظ أن $AA^{-1} = A^{-1} A = I$ حيث I مصفوفة الوحدة.

مثال:

أوجد A^{-1} إذا علم أن:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

الحل:

ـ ١

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -7 \end{vmatrix} = 20 \neq 0$$

٢ ـ مرافقات العناصر:

$$A_1 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_2 = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = 21$$

$$A_3 = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 18$$

$$B_1 = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = 6$$

$B_2 = -7$ ، $B_3 = -6$ ، $C_1 = 4$ ، $C_2 = 6$ ، $C_3 = 4$

٣ ـ مصفوفة المتعامل

$$\begin{bmatrix} 2 & 21 & -18 \\ 0 & -7 & 6 \\ 4 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

٤ ـ المصفوفة المرافقة لصفوف مصفوفة العوامل المرافقة هي :

$$AdjA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 21 & 4 & -8 \\ -18 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

حيث معكوس المصفوفة A هو:

$$A_{-1} = \frac{1}{|A|} \; AdjA = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 21 & 4 & -8 \\ -18 & 6 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{20} & \frac{0}{20} & \frac{4}{20} \\ \frac{21}{20} & \frac{4}{20} & \frac{-8}{20} \\ -\frac{18}{20} & \frac{6}{20} & \frac{4}{20} \end{bmatrix}$$

تحقق من أن $A^{-1} A = A A^{-1} = I$

٦ ـ ٥ استعمال المصفوفات في حل المعادلات الخطية غير المتجانسة:

مجموعة المعادلات الخطية غير المتجانسة:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

يمكن كتابتها على الصورة:

$$AX = D$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad , X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

تسمى **A** مصفوفة المعادلات.

واضح أنه كانت $|A| \neq 0$ فإن المعادلة $AX = D$ لها حل:

$$X = A^{-1} D$$

باستخدام المصفوفات.

مثال:

حل مجموعة المعادلات الآتية:

$$x + y + z = 9$$

$$2x + 2y + 2z = 52$$

$$2x + y - z = 0$$

الحل: لايجاد A^{-1} نحسب أولاً $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -12 & 2 & 2 \\ 16 & -3 & -5 \\ -8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ويكون حل المجموعة للمعادلات هو:

$$X = A^{-1} B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -12 & 2 & 2 \\ 16 & -3 & -5 \\ -8 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 52 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{21}{20}\begin{bmatrix} -108 - 104 \\ 144 - 156 \\ -72 - 52 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$x = 1 \quad y = 3 \quad , \quad z = 5.$

ملحوظة: يمكن حل المثال السابق أيضاً باستخدام قاعدة كرامر Cramer Rule.

٦ ـ ٦ تمارين

(١) بين نوع المصفوفات الآتية:

$$A = [3 \quad -1 \quad 5], \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 \\ -7 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad , E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(٢) أكمل المصفوفة المتماثلة الآتية بكتابة العناصر المفقودة:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 5 \\ - & 4 & 7 & -9 \\ - & - & 0 & 8 \\ - & - & - & 3 \end{bmatrix}$$

(٣) اكتب المصفوفة $\overline{A}$ المرافقة للمصفوفة A حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 8+3i & 0 & -8i \\ 4 & 2i & 4-7i \\ 1+i & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

(٤) إذا كان:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad , B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 5 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$$

أوجد

(i) $A + B$

(ii) $A - B$

(iii) $3A + 2B$

(٥) أوجد حاصل ضرب المصفوفتين A ، B بالصورتين BA, AB على الترتيب إذا كان:

(a) $A = [3 \quad 1 \quad 5] \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , B = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , B = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad , B = A'$

(٦) إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ -2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \quad , B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

أثبت أن

(a) $(A + B)' = A' + B'$

(b) $(AB)' = B' A'$

(c) $(B')' = A$

(٧) إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad , B = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad , C = [3 \quad 1 \quad 2]$$

أثبت أن

$$A\,(BC) = (AB)\,C$$

(٨) إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

أثبت أن

$$A(B + C) = AB + AC$$

(٩) إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -7 & -5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

أثبت أن

$$-2A + A^2 + A^3 = 0$$

(١٠) إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 2i & 1 & 3-i \\ 1+i & -i & 2 \\ 1-i & 2+i & 3+i \end{bmatrix}$$

أوجد:

(a) $\overline{A}$, (b) A' , (c) $A\overline{A}$, (d) $\overline{A}\,A$,

(e) $A\,A'$, (f) $A'\,A$, (g) $\overline{A}\;A'$, (h) $(\overline{A})'$,

(i) $\overline{(A')}$, (j) $A+\overline{A}$.

(١١) حل المعادلات التالية باستخدام المصفوفات:

i) $3x + y = 5$, ii) $2x - y = 1$

$2x - 3y = -4$, $3x - 2y = 26$

iii) $4x - 2y = 4b$, iv) $2x + y = 8$

$x + y = 3a + 2b$, $-5x + 3y + 13 = 0$

الباب السابع

نظرية ذات الحدين

(THE BINOMIAL THEOREM)

٧ ـ ١ نظرية ذات الحدين بأس صحيح:

سبق لنا دراسة أنه إذا كانت n عدداً صحيحاً موجباً فإنه لجميع قيم n:

$$(1 + x)^2 = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\, x^r = \sum_{r=1}^{n+1} {}^nC_{r-1}\, x^{r-1} \qquad \text{.......................} \quad (1)$$

حيث:

$$^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)\,!}$$

$$= \frac{n\,(n-1)\,...\,(n-r+1)}{r\,!} \qquad \text{.........................} \quad (2)$$

. ولنبدأ أولاً بدراسة بعض خواص معامل x^r في (1).

مثال (١):

أثبت أن:

(a) $^nC_0 = {}^nC_n = 1$ (b) $^nC_{n-1} = {}^nC_{n-1} = n$

(c) $^nC_r = 0$ ، $r > n + 1$ (d) $^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

الحل:

بالتعويض المباشر في (2) ينتج:

$$\text{(a)}\quad {}^{n}C_0 = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = 1$$

$${}^{n}C_n = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$$

$$\text{(b)}\quad {}^{n}C_1 = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n \text{ ، } {}^{n}C_{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = n$$

(c) عندما $r > n + 1$ يتضح من الطرف الأيسر في (2) أن البسط يشمل العامل $(n-n)$ وبالتالي فإن $^{n}C_r = 0$ لجميع قيم n عندما $r > n + 1$.

الطرف الأيسر (d)

$$\begin{aligned} {}^{n}C_r + {}^{n}C_{r-1} &= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!\,(r-1)!}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right) \\ &= \frac{n!\,(n+1)}{r!\,(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!\,(n-r+1)!} \\ &= {}^{n+1}C_r \end{aligned}$$

وهذا يساوي الطرف الأيمن.

مثال (٢):

أثبت أن:

$${}^{m+n}C_r = {}^{m}C_r + {}^{m}C_{r-1} \times {}^{n}C_1 + {}^{m}C_{r-2} \times {}^{n}C_2 + \dots\dots\dots + {}^{m}C_1 \times {}^{n}C_{r-1} + {}^{n}C_r$$

الحل:

نـلاحظ أن الـطرف الأيسر هـو معـامـل x^r في مفكـوك $(1+x)^{m+n}$ ومن المتطابقة:

$$(i)\ (1+x)^{m+n} = (1+x)^m\,(1+x)^n$$

نستنتـج أن معامـلي x^r في الطرفين يتساويـان بفـك الـطرف الأيمن في (i) حيث ينتج:

$$(ii)\ (1+x)^{m+n} = (1 + {}^mC_1\,x + {}^mC_2\,x^2 + \ldots + {}^mC_{r-1}\,x^{r-1} + {}^mC_r\,x^r + \ldots + x^m) \times (1 + {}^nC_1\,x + \ldots + x^n$$

والحد المشتمل على x^r في الطرف الأيمن من (ii) هو:

$$(1 \times {}^mC_r + {}^mC_{r-1} \times {}^nC_1 + \ldots\ldots + {}^mC_1 \times {}^nC_{r-1} + {}^nC_r)\,x^r$$

وبمساواة معاملي x^r في طرفي المتطابقة نحصل على المطلوب.

٧ ـ ٢ نظرية ذات الحدين بأي أس:

سنعتـبر الآن مفكوك $(1+x)^n$ في قـوى x التصاعـديـة إذا كـانت n كسـراً موجباً أو أي عدد حقيقي سالب.

إذا نظرنا في المفكوك:

$$(i)\ (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + n(n-1)\ldots(n-r+1)\frac{x^r}{r!} + \ldots$$

حيث n كسر موجب أو أي عدد سالب، نلاحظ أن الطرف الأيمن في (i) به حدود لا حصر لها لأن كل عامل في بسط معامل الحد يختلف عن الصفر لكل قيم r (لأن r تأخذ القيم الصحيحة الموجبة).

والشرط اللازم لصحة هذا المفكوك هو أن يكون مجموعه إلى ما لا نهاية كمية محدودة ويتحقق هذا الشرط إذا كان $|x| < 1$

كذلك نجد أنه إذا كانت n عدداً غير صحيح موجباً، فإن:

$$\text{(ii)}\ (a + x)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} a^{n-r} x^r$$

مثال (٣):

إذا كان $|x| < 1$ أوجد مفكوك:

(a) $(1 + x)^{-1}$ ، (b) $(1 + x)^{-2}$

الحل:

(a) بوضع $n = -1$ أو بالقسمة نحصل على المفكوك المطلوب وهو:

$$(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 \dots + (-1)^r x^r + \dots$$

(b) بوضع $n = -2$ في (i) أو بالقسمة المطوّلة ينتج:

$$(1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots - (-1)^r (r + 1) x^r + \dots$$

مفكوك $(a + x)^n$:

لإيجاد هذا المفكوك نقوم بتحويل أحد مقداري ذي الحدين إلى الوحدة على الصورة:

$$(a + x)^n = x^n \left\{1 + \frac{a}{x}\right\}^n \text{ ، } |x| > |a|$$

$$= a^n \left\{1 + \frac{x}{a}\right\}^n \text{ ، } |x| < |a|$$

مثال (٤):

إذا كانت $x > 4$ أوجد الحدود الأربعة في مفكوك:

$$(4 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

الحل:

$$(4 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = (x^2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{4}{x^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} \text{ ، } \frac{4}{x^2} < 1$$

$$= \frac{1}{x} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{x^2}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2\,!} \left(\frac{4}{x^2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3\,!} \left(\frac{4}{x^2}\right)^3 + \ldots\ldots \right\}$$

$$= \frac{1}{x} \left\{ 1 - \frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^4} - \frac{5}{x^6} + \ldots \right\}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{6}{x^5} - \frac{5}{x^7} + \ldots$$

مثال (٥):

أوجد الحدود الثلاثة الأولى في مفكوك:

$$\frac{(1 + 2x)^{\frac{1}{5}}}{(1 - 3x)^{\frac{1}{4}}}$$

الحل:

$$\frac{(1+2x)^{\frac{1}{5}}}{(1-3x)^{\frac{1}{4}}} = (1+2x)^{\frac{1}{5}}\,(1-3x)^{-\frac{1}{4}}$$

$$= \left\{ 1 + \frac{1}{5}\,(2x) + \frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)}{2\,!}\,(2x)^2 + \right.$$

$$\left. + \ldots \right\} \left\{ 1 + \frac{3\,x}{4} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{5}{4}\right)(-3x)^2}{2!} + \ldots \right\}$$

$$= \left\{ 1 + \frac{2\,x}{5} - \frac{8}{25}\,x^2 + \ldots \right\} \left\{ 1 + \frac{3\,x}{4} + \frac{45}{32}\,x^2 + \ldots \right\}$$

$$= 1 + \frac{23}{20}\,x - \frac{1573}{800}\,x^2 + \ldots.$$

ويكون المفكوك صحيحاً إذا كان $1 > |2x|$ و $| > |3x|$

أي $|x| < \frac{1}{2}$ ، $|x| < \frac{1}{3}$ ، أي $|x| < \frac{1}{3}$

مثال (٦):

باستخدام نظرية ذات الحدين، أوجد لثلاثة أرقام عشرية قيمة كل من:

(a) $\sqrt{24}$ (b) $\sqrt[3]{28}$ (c) $\sqrt{1.01}$

الحل:

$$\text{(a) } \sqrt{24} = \sqrt{25-1} = 5\left(1-\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 5\left\{ 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{25} + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}\,\frac{1}{(25)^2} + \ldots. \right\}$$

$$= 4\{1 - 0.02 - 0.0002\}$$

$$= 4.899$$

$$(b)\sqrt[3]{28} = (27+1)^{\frac{1}{3}} = 3\left(1+\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 3\left\{1 + \frac{1}{3\times 27} + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}\frac{1}{(27)^2} + \dots\right\}$$

$$= 3 + \frac{1}{27} - \frac{1}{27\times 81} - \dots$$

$$= 3.037 - 0.0004 = 3.037$$

$$(c)\ \sqrt{1.01} = (1+0.01)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\times 0.01 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}(0.01)^2 + \dots\dots$$

$$= 1 + 0.005 - 0.000$$

$$= 1.005$$

مثال (٧) :

أوجد معامل x^r في مفكوك $\frac{2x}{1-x^2}$ إذا كان $|x| < 1$, $r = 0, 1, 2, \dots$

الحل:

$$\frac{2x}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}$$

$$= (1-x)^{-1} - (1+x)^{-1}$$

$$\left\{1 + x + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3 + \dots\right.$$

$$\left. + \frac{(-1)(-2)\dots(-r)}{r!}x^r + \dots\right\} - \left\{1 - x + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^2 +\right.$$

$$\left. + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3 + \dots + \frac{(-1)(-2)\dots(-r)}{r!}x^r + \dots\right\}$$

$$= \{1 + x + x^2 + \dots + x^r + \dots\} - \{1 - x + x^2 + \dots + (-1)^r x^r$$

$$+ \dots\}$$

$$= \{(1 - (-1)^r\} x^r \text{ ، } r = 0, 1, 2, \dots, \quad |x| < |$$

مثال (٨):

باستخدام نظرية ذات الحدين أثبت أن مجموع المتسلسلة:

$$1 - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1.3}{2!\,2^2.3^2} - \frac{1.3.5}{3!\,2^3.3^3} + \dots\dots$$

إلى ما لا نهاية يساوي $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

الحل:

نفرض أن المتسلسلة هي متسلسلة ذات الحدين، أي يمكن فرض:

$$(1 + x)^{-n} = 1 - \frac{1}{2.3} \quad \frac{1.3}{2!\,2^2.3^2} - \frac{1.3\,5}{3!\,2^3.3^3} + \dots$$

حيث $1 > |x|$ وبالتالي فإن:

$$1 + nx + \frac{(-n)(-n-1)}{2!}x^2 + \frac{(-n)(-n-1)(-n-n)}{3!}x^3 + ...$$

$$= 1 - \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2!\,2^2.3^2} - \frac{1.3.5}{3!\,2^3.\,3^3} + ...$$

وبمساواة الحدود المتناظرة ينتج :

$$\text{(i)} \quad nx = \frac{1}{2.3}$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{n(n+1)x^2}{2} = \frac{1.3}{2!\,2^2.3^2}$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 = \frac{1.2.5}{3!\,2^3.3^3}$$

ومن حل المعادلتين (i) ، (ii) كما يلي: $\text{(ii)} - \text{(i)}^2$

$$\frac{n+1}{2n} = \frac{1.3}{2!\,2^2.3^2}\,.\,2^2\,.\,3^2 = \frac{3}{2}$$

ينتج

$$2n + 2 = 6n$$

$$\therefore n = \frac{1}{2}$$

من (i)

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2.3}$$

وينتج :

$$x = \frac{1}{3}$$

ونلاحظ أن قيمتي n ، x هذه تحققان المعادلة (iii) وبالتالي فإن المتسلسلة المعلومة متسلسلة ذات حدين. وحيث يساوي مجموعها إلى ما لا نهاية المقدار:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

٧ ـ ٣ تمارين

(١) مستعيناً بالمتطابقة:

$$(1 + x)^{m+n} = (1 + x)^{m} (1 + n)^{n}$$

أثبت ما يأتي:

(i) ${}^{n+1}C_r = {}^{n}C_r + {}^{n}C_{r-1}$

(ii) ${}^{n+1}C_r = {}^{n}C_r + 2\,{}^{r}C_{r+1}\,{}^{n}C_{r-2}$

(٢) أوجد الحدود الأربعة الأولى في مفكوك كل من:

(a) $(9 + x)^{\frac{1}{2}}$ ، (b) $\left(x + \frac{1}{x} \right)^{-1}$

(c) $(1 - 4x)^{-3}$ ، (d) $\dfrac{1 - 2x}{\sqrt{1+x}}$

(٣) أوجد معامل x^2 في مفكوك:

$$(1 + x)^{-3} \cdot (1 + x)^{-4}$$

(٤) أوجد الحدود الثلاثة الأولى في مفكوك:

$$(2 + x)^{-2} \cdot (1 + 4x)^{-\frac{1}{2}}$$

في قوى x التصاعدية ذاكراً قيم x التي تحقق المفكوك.

(٥) أوجد الحدين الأولين في قوى x التصاعدية في مفكوك:

$$\frac{\left(1 + 2x\right)^{-1} + \left(1 + \frac{2}{2}\,x\right)^{-7}}{(1 + x)^{-2}}$$

ذاكراً القيم التي تحقق المفكوك.

(٦) باستخدام مفكوك ذات الحدين أوجد لأربعة أرقام عشرية قيمة كل من:

(a) $\sqrt{145}$ (b) $=(1.01)^{-5}$

(c) $(1003)^{\frac{1}{3}}$ (d) $(65)^{-\frac{1}{3}}$

(٧) أ ـ أذكر كيفية تطبيق نظرية ذات الحدين لإيجاد قيمة $(a/b)^n$ عندما تكون $|a-b| << 1$

ب ـ أوجد قيمة:

$$\left(\frac{17.11}{17.17}\right)^{\frac{1}{4}}$$

مقرباً الإجابة لأربعة أرقام عشرية.

(٨) أوجد قيمة C بحيث لا يحتوي مفكوك

$$\frac{(1+Cx)^{\frac{1}{2}}\ (1-2x)^{\frac{1}{3}}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

في قوى x التصاعدية على x^2. ولقيمة C هذه، أوجد معامل x^3.

الباب الثامن

جمع بعض المتسلسلات المنتهية

في هذا الباب سوف نقوم بشرح بعض الطرق لإيجاد مجموع المتسلسلات.

٨ ـ ١ أولاً: طريقة الفروق

إذا طلب منا إيجاد

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$

فإنه في بعض الأحيان يمكن التعبير عن الحد a_r (الحد الذي رتبته r) كفرق بين قيمة دالة عند r وقيمة نفس الدالة عند $(r - 1)$ أو بعبارة أخرى يمكن إيجاد دالة $f(r)$ تحقق:

$$a_r = f(r) - f(r - 1)$$

واضح أن

$$a_1 = f(1) - f(0)$$

$$a_2 = f(2) - f(1)$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1} = f(n) - f(n - 1)$$

وبالتالي

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = f(n) - f(0)$$

مثال (١)

أوجد قيمة $\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)$

الحل

$$a_r = r(r+1)(r+2)$$

ولكن

$$r(r+1)(r+2)(r+3) - (r-1)r(r+1)(r+2) =$$
$$= r(r+1)(r+2)(r+3-r+1) = 4r(r+1)(r+2) = 4a_r$$

إذاً $a_r = \frac{1}{4} r(r+1)(r+2)(r+3) - \frac{1}{4}(r-1)r(r+1)(r+2)$

وحيث أن $\sum_{r=1}^{n} a_r = f(n) - f(0)$

و

$$f(r) = \frac{1}{4} r(r+1)(r+2)(r+3)$$

إذاً

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = \sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) - \frac{1}{4} \times 0$$

$$= \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$$

مثال (٢)

أوجد مجموع n من الحدود الأولى من المتسلسلة:

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \ldots.$$

الحل

$$a_r = \frac{1}{r(r+1)(r+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r(r+1)} - \frac{1}{(r+1)(r+2)}\right]$$

$$= f(r) - f(r+1)$$

حيث

$$f(r) = \frac{1}{2} \frac{1}{r(r+1)}$$

$$a_1 = f(1) - f(2)$$

$$a_2 = f(2) - f(3)$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1} = f(n-1) - f(n)$$

$$a_n = f(n) - f(n+1)$$

إذاً

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = f(1) - f(n+1)$$

$$\sum_{r=1}^{n} ar = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)(r+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)$$

سبق لنا أن أثبتنا بطريقة الاستقراء الرياضي القوانين التالية:

$$\sum_{r=1}^{n} r = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} \; n\,(n + 1)\,(2n + 1) \quad (2)$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (3)$$

يمكن أحياناً استخدام القوانين (1) و (2) و (3) في إيجاد مجموع n من الحدود الأولى في المتسلسلة.

مثال (٣):

أوجد مجموع n من الحدود الأولى في المتسلسلة:

$1 \times 2 \times 4 + 2 \times 3 \times 5 + 3 \times 4 \times 6 + \dots$،

الحل:

$$a_r = r\,(r + 1)\,(r + 3)$$

$$\sum_{r=1}^{n} r\,(r + 1)\,(r + 3) = \sum_{r=1}^{n} (r^3 + 4r^2 + 3r)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} r^3 + 4\sum_{r=1}^{n} r^2 + 3\sum_{r=1}^{n} r$$

$$= \frac{1}{4} \; n^2\,(n + 1)^2 + 4 \times \frac{1}{6} \; n\,(n + 1)\,(2n + 1)$$

$$+ \frac{3}{2} \; n\,(n + 1)$$

$$= \frac{1}{4} \; n^2\,(n + 1)^2 + \frac{2}{3} \; n\,(n + 1)\,(2\,n + 1)$$

$$+ \frac{3}{2} \; n\,(n + 1)$$

$$= \frac{1}{12} \; n\,(n + 1)\left[3n\,(n + 1) + 8\,(2n + 1) + 18\right]$$

$$= \frac{1}{12} \; n\,(n + 1)\,(3n^2 + 19n + 26)$$

$$= \frac{1}{12} \; n\,(n + 1)\,(4n + 13)\,(n + 2)$$

تمارين

١) أثبت أن

$$\sum_{r=1}^{n} r\,(3r-1) = n^2\,(n+1)$$

٢) أثبت أن

$$\sum_{r=1}^{n} r\,(3r+1) = n\,(n+1)^2$$

٣) أثبت أن

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{4r^2-1} = \frac{n}{2n+1}$$

٤) أثبت أن

$$1 \times 3 + 3 \times 5 + \dots + (2n-1)\,(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6}\left[\,(2n-1)\,(2n+1)\,(2n+3)+3\,\right]$$

بإستخدام طريقة الفروق.

٥) أوجد مجموع n من الحدود الأولى من المتسلسلة

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 5 + 3 \times 4 \times 7 + 4 \times 5 \times 9 + \dots$$

٦) أثبت أن

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + (2n+1)^3 = (n+1)^2\,(4n+1)$$

٧) أثبت أن مجموع الحدود العشرة الأولى من المتسلسلة

$$\frac{1}{2 \times 5 \times 8} + \frac{1}{5 \times 8 \times 11} + \frac{1}{8 \times 11 \times 14}$$

يساوي $\frac{37}{2240}$

٨) أوجد الحد الذي رتبته 3 في المتسلسلة

$$\frac{2 \times 1}{2 \times 3} + \frac{2^2 \times 2}{3 \times 4} + \frac{2^3 \times 3}{4 \times 5} + ...$$

وأثبت أن مجموع n من الحدود الأولى في المتسلسلة يساوي

$$\frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$$

٩) أثبت أن:

$$1 \times 2 \times 3 + 3 \times 4 \times 5 + ... + (2n-1)\, 2n\, (2n+1)$$
$$= n\,(n+1)\,(2n^3 + 2n - 1)$$

٨ ـ ٢ ثانياً: المتسلسلات العددية:

تعريف: تسمى المتسلسلة

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

متسلسلة عددية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي d بحيث أن:

$$a_{k+1} - a_k = d \qquad (1)$$

لكل عدد صحيح موجب k. يسمى العدد d بأساس المتسلسلة العددية.

مثال (١):

أثبت أن المتسلسلة

$$2 + 5 + 8 + 11 + ... + (3n-1) + ...$$

متسلسلة عددية وأوجد الأساس.

الحل:

حيث أن

$$a_n = 3n - 1$$

إذاً لكل عدد صحيح موجب k ينتج أن:

$$a_{k+1} - a_k = [\,3(k+1) - 1\,] - (3k - 1)$$
$$= 3k + 3 - 1 - 3k + 1 = 3$$

من التعريف السابق تكون المتسلسلة المعطاة متسلسلة عددية أساسها يساوي 3

باستخدام (1):

$$a_{k+1} = a_k + d$$

لكل عدد صحيح موجب k. الآن من السهل ملاحظة أن:

$$a_1 = a_1 \,,\, a_2 = a_1 + d \,,\, a_3 = a_1 + 2d \,,\, a_4 = a_1 + 3d \,,...$$

وباستخدام طريقة الاستقراء الرياضي يمكن إثبات أن

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,d \qquad (2)$$

مثال (٢):

أوجد الحد رقم 15 في المتسلسلة العددية التي حدودها الثلاثة الأولى:

20 , 16.5 , 13

الحل:

واضح أن $d = -3.5$

حيث أن

$$a_1 = 20 \,,\, d = -3.5 \,,\, n = 15$$

إذاً

$$a_{15} = 20 + (15 - 1)(-3.5) = 20 - 49 = -29$$

مثال (٣):

إذا كان الحد الرابع من متسلسلة عددية يساوي 5 والحد التاسع يساوي 20، أوجد الحد السادس.

الحل:

حيث أن

$$a_n = a_1 + (n - 1) d$$

إذاً

$$5 = a_1 + (4 - 1) d = a_1 + 3d$$

$$20 = a_1 + (9 - 1) d = a_1 + 8d$$

هذا النظام له الحل الوحيد

$$a_1 = -4 , \quad d = 3$$

إذاً

$$a_6 = -4 + 3 (6 - 1) = 11$$

نظرية.

إذا كان

$$a_1 + a_1 + \dots + a_n + \dots$$

متسلسلة عددية ولها الأساس d، فإن

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = S_n = \frac{n}{2} \left[2 a_1 + (n - 1) d \right]$$

و

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

البرهان.

بإستخدام (1) و (2) نحصل على:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + [\, a_1 + (n-1)\, d \,]$$

$$S_n = (a_1 + a_1 + \ldots + a_1) + [\, d + 2d + \ldots + (n-1)\, d \,]$$

في القوس الأول العدد a_1 يظهر n من المرات. إذاً:

$$S_n = n\, a_1 + d\,[\, 1 + 2 + \ldots + (n-1) \,]$$

ولكن:

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

لأننا نعلم أن

(أنظر باب الاستقراء الرياضي)

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

إذاً

$$S_n = n\, a_1 + d\, \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{n}{2}\, [\, 2a_1 + (n-1)\, d \,].$$

وبما أن

$$a_n = a_1 + (n-1)\, d$$

نحصل على

$$S_n = \frac{n}{2}\, (a_1 + a_n)$$

مثال (٤):

أوجد مجموع جميع الأعداد الزوجية من 2 إلى 100.

الحل:

نعتبر المتسلسلة العددية

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n + \dots$$

ونوجد مجموع الـ 50 حدّاً الأولى. من النظرية السابقة نعلم أن:

$$S_n = \frac{n}{2}\left[\,2a_1 + (n-1)\,d\,\right]$$

نلاحظ أن

$$a_{50} = 100 \quad , \quad a_1 = 2 \quad , \quad n = 50$$

إذاً

$$S_{50} = \frac{50}{2}\left[\,2.2 + (50-1)\,2\,\right] = 25\,(4 + 98) = 2550$$

أيضاً يمكننا استخدام القانون

$$S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n)$$

للحصول على

$$S_{50} = \frac{50}{2}\,(2 + 100) = 2550$$

تعريف.

المتوسط العددي للعددين a وb يعرف على أنه العدد $\frac{a+b}{2}$.

نلاحظ الآن أن:

$$\frac{a+b}{2} - a = b - \frac{a+b}{2}$$

هذه الفكرة يمكن تعميمها كالتالي:

إذا كان: $c_1, c_2, ..., c_k$ أعداداً حقيقية بحيث أن:

$$c_1 - a = c_2 - c_1 = c_3 - c_2 = ... = c_k - c_{k-1} = b - c_k$$

فإننا نسمي: $c_1, c_2, ..., c_k$ الـ k متوسطاً عددياً (the k^{th} mean) للعـددين a و b. في هذه الحالة نقول أننا أدخلنا k متوسطاً حسابياً بين a و b.

مثال (٥):

أدخل ثلاثة متوسطات عددية بين 2 و 9.

الحل:

المطلوب أن نوجد ثلاثة أعداد c_1, c_2, c_3 بحيث أن:

$$c_1 - 2 = c_2 - c_1 = c_3 - c_2 = 9 - c_3$$

نلاحظ أن:

$$a_1 = 2 , a_5 = 9 , n = 5$$

إذاً:

$$9 = 2 + (5 - 1) d$$

$$9 = 2 + ½d$$

$$7 = 4d$$

$$d = \frac{7}{4} .$$

وبما أن $c_1 = a_1 + d$

إذاً $c_1 = 2 + \frac{7}{4} = \frac{15}{4}$

وبما أن $c_2 = c_1 + d$

إذاً $c_2 = \frac{15}{4} + \frac{7}{4} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$

وبما أن $c_3 = c_2 + d$

إذاً $c_3 = \frac{22}{4} + \frac{7}{4} = \frac{29}{4}$

تمارين

في كل تمرين (١) ـ (٦) أوجد الحد الخامس، والحد النوني لكل من المتسلسلات العددية:

١) $2 + 6 + 10 + 14 + \ldots$

٢) $16 + 13 + 10 + 7 + \ldots$

٣) $3 + 2.7 + 2.4 + 2.1 + \ldots$

٤) $-7 - 3.9 - 0.8 - 2.3 - \ldots$

٥) $-6 - 4.5 - 3 - 1.5 - \ldots$

٦) $\text{Log } 1000 + \text{Log } 100 + \text{Log } 10 + 0 + \ldots$

٧) أوجد الحد 12 من المتوالية العددية التي حدها الأول يساوي 9.1 والحد الثاني يساوي 7.5.

٨) أوجد متسلسلة عددية فيها: $a_3 = 7$, $a_{20} = 43$ ومن ثم أوجد a_{15}.

في كـل من التمارين التـاليـة أوجـد مجمـوع المتسلسلة العـدديـة التي تحقق الشروط التالية.

٩) $a_1 = 40 \quad , \quad d = -3 \quad , \quad n = 30$

١٠) $a_1 = 5 \quad , \quad d = 0.1 \quad , \quad n = 40$

١١) $a_7 = \frac{7}{8} \quad , \quad d = -\frac{2}{3} \quad , \quad n = 15$

١٢) أوجد $\sum_{k=1}^{26} (3k - 5)$

١٣) أوجد $\sum_{k=1}^{18} \left(\frac{1}{2}k + 7\right)$

١٤) أدخل خمسة متوسطات حسابية بين 2 و 10.

١٥) أدخل ثلاثة متوسطات عددية بين 3 و 5.

٨ ـ ٣ ثالثاً: المتسلسلات الهندسية

نوع آخر من المتسلسلات اللانهائية يعرف كالتالي:

تعريف المتسلسلة:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

تسمى متسلسلة هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي $r \neq 0$ بحيث أن

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = r \qquad (1)$$

لكل عدد صحيح موجب k. العدد r يسمى بأساس المتسلسلة الهندسية.

نلاحظ من (1) أن:

$$a_{k+1} = a_k \cdot r$$

لكل عدد صحيح موجب k. نلاحظ الآن:

$$a_1 = a_1 \quad , \quad a_2 = a_1 r \quad , \quad a_3 = a_1 r^2 \quad , \quad a_n = a_1 r^3 ,\ldots$$

ومن نظرية الاستقراء الرياضي يسهل اثبات أن

$$a_n = a_1 r^{n-1} \qquad (٢)$$

مثال (١):

أوجد الحدود الخمسة الأولى والحد العاشر من المتسلسلة الهندسية التي حدها الأول 3 وأساسها $-\frac{1}{2}$.

الحل:

$$a_1 = 3 \quad \text{و} \quad r = -\frac{1}{2}$$

إذاً الحدود الخمسة الأولى كالتالي:

$$3, -\frac{3}{2} \quad , \quad \frac{3}{4} \quad , \quad -\frac{3}{8} \quad , \quad \frac{3}{16}$$

باستخدام $a_n = a_1 r^{n-1}$ نحصل على

$$a_{10} = a_1 r^9$$

$$a_{10} = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^9 = -\frac{3}{512}$$

مثال (٢):

إذا كان الحد الثالث في المتسلسلة الهندسية يكون 5 والحد السادس يكون 40 − ، أوجد الحد الثامن.

الحل:

$a_3 = 5$ و $a_6 = -40$ حيث أن:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

إذاً
$$5 = a_1 r^2$$
$$-40 = a_1 r^5$$

وبما أن $r \neq 0$، إذاً من المعادلة الأولى ينتج أن

$$a_1 = \frac{5}{r^2}$$

وبوضع $a_1 = \frac{5}{r^2}$ في المعادلة الثانية نحصل على

$$-40 = \frac{5}{r^2} \cdot r^5 = 5 r^2$$

إذاً
$$-8 = r^3$$

أي أن
$$-2 = r$$

بوضع $r = -2$ في المعادلة $5 = a_1 r^2$

نحصل على
$$a_1 = \frac{5}{4}$$

وبما أن
$$a_8 = a_1 r^7$$

إذاً
$$a_8 = \frac{5}{4} (-2)^7 = -160$$

ـ الآن نحاول إيجاد S_n حيث

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

باستخدام (1) و (2) نحصل على

$$S_n = a_1 + a_1 r + \dots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

إذا كانت $r = 1$ فإننا نحصل على

$$S_n = n a_1$$

الآن نفرض أن $r \neq 1$. بضرب طرفي (3) في r نحصل على:

$$r\,S_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n$$

إذا

$$S_n - r\,S_n = a_1 - a_1 r^n$$

$$S_n\ (1 - r) = a_1 (1 - r^n)$$

وبما أن $r \neq 1$ ، إذاً $r - 1 \neq 0$. الآن

بقسمة الطرفين على $(r - 1)$ نحصل على

$$S_n = \frac{a_1 (1-r^n)}{1 - r}$$

في الحقيقة أثبتنا صحة النظرية:

نظرية:

إذا كانت

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

متسلسلة هندسية أساسها $r \neq 1$ فإن:

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

مثال (٣):

أوجد الحدود الخمسة الأولى من المتسلسلة الهندسية:

$$1 + 0.3 + 0.09 + 0.027 + \ldots$$

الحل:

$$a_1 = 1 \quad ، \quad r = 0.3 \quad و \quad n = 5$$

إذاً

$$S_5 = 1 \left(\frac{1-(0.3)^5}{1-0.3}\right)$$

$$= 1.4251$$

نختتم هذا الباب بنوع آخر من المتسلسلات يسمى بالمتسلسلات العددية الهندسية.

٨ ـ ٤ رابعاً: المتسلسلات العددية الهندسية

اعتبر المتسلسلة:

$$a + [a+d]\,x + [a+2d]\,x^2 + \ldots + [a+(n-1)\,d]\,x^{n-1} + \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

حيث $x \neq 1$. نلاحظ أن الحد الذي رتبته r في (1) يكون:

$$[a+(r-1)\,d]\,x^{r-1}$$

حيث $[a+(r-1)\,d]$ هو الحد الذي رتبته r في المتسلسلة العددية:

$$a + [a+d] + [a+2d] + \ldots + [a+(n-1\,d] + \ldots..$$

و x^{r-1} هو الحد الذي رتبته r في المتسلسلة الهندسية

$$1 + x + \ldots + x^{n-1} + \ldots$$

تسمى (1) بالمتسلسلة العددية الهندسية.

الآن نحاول إيجاد

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} [a+(r-1)\,d]\,x^{r-1}$$

$$= a + [a+d]\,x + \ldots. + [a+(n-1)\,d]\,x^{n-1}$$

$$x\,S_n = ax + [a+d]\,x^2 + \ldots + [a+(n-2)d]\,x^{n-1} + [a+(n-1)d]\,x^n.$$

إذاً

$$(1-x) S_n = a + dx + dx^2 + \ldots + d x^{n-1} - [a + (n-1)d] x^n$$

$$= a - [a + (n + 1) d] x^n + \frac{dx (1 - x^{n-1})}{1 - x} ;$$

وحيث أن $x \neq 1$ فإن

$$S_n = \frac{a - [a +(n-1) d] x^n}{1 - x} + \frac{dx (1 - x^{n-1})}{(1 - x)^2}$$

٨ ـ ٥ تمارين

في كل تمرين من التمارين ١ ـ ٩ أوجد الحد الخامس، والحد النوني للمتسلسلات الهندسية التالية:

١) $8 + 4 + 2 + 1.....$

٢) $300 - 30 + 3 - 0.3 + ...$

٣) $4 + 1.2 + 0.36 + 0.108 + ...$

٤) $1 - \sqrt{3} + 3 - \sqrt{27} + ...$

٥) $2 + 6 + 18 + 54 + ...$

٦) $1 - x^2 + x^4 - x^6 + ...$

٧) $2 + 2^{x+1} + 2^{2x+1} + 2^{3x+1} + ...$

٨) $10 + 10^{2x-1} + 10^{4x-3} + 10^{6x-5} + ...$

٩) $1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27} + ...$

١٠) أوجد الحد السادس من المتسلسلة الهندسية التي حدها الأول 4 وحدها الثاني 6.

١١) أوجـد الحد السـابع من المتسلسلة الهندسية التي حدهـا الثاني 8 وحـدهـا الثالث $-\sqrt{2}$.

١٢) إذا كان لدينا متسلسلة هندسية فيها

$$a_5 = \frac{1}{16} \text{ ، } r = \frac{3}{2}$$

أوجد a_1 و S_5

١٣) إذا كان لدينا متسلسلة هندسية فيها

$$a_4 = 4 \text{ و } a_7 = 12$$

أوجد r و a_{10}

أوجد المجموع في كل من التمارين التالية:

١٤) $\sum_{k=1}^{10} 3^k$

١٥) $\sum_{k=1}^{9} (-\sqrt{5})^k$

١٦) $\sum_{r=1}^{n} r\, x^{r-1}$

الباب التاسع

نظريّة المعادلات

THEORY OF EQUATIONS

بفرض أن:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n \,, \quad a_0 \neq 0$$

حيث n عدد صحيح موجب و $a_0, a_1 \dots, a_{n-1}, a_n$ ثوابت، تسمى هذه الصورة كثيرة حدود من الدرجة n في المتغير x. بينما

$$(*) \quad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \,, \; a_0 \neq 0$$

حيث n عدد صحيح موجب و $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} x + a_n$ ثوابت، تسمى معادلة كثيرة حدود من الدرجة n في المتغير x. فمثلاً:

$$x^3 + 3x^2 - 3x - 14 = 0$$

معادلة كثيرة حدود من الدرجة 3 في المتغير x.

و

$$x^2 + 5x + 6 - 0$$

معادلة كثيرة حدود من الدرجة 2 في المتغير x.

x_1 تسمى جذراً للمعادلة (*) إذا كان $f(x_1) = 0$. فمثلاً 2 جذر للمعادلة:

$$f(x) = x^2 + 5x + 6$$

لأن:

$$f(2) = 4 - 10 + 6 = 0$$

٩ ـ ١ النظرية الأساسية للجبر:

(The Fundamental Theorem of Algebra)

تنص هذه النظرية على أن كل معادلة كثيرة حدود من الدرجة $n>0$ على الصورة (*) لها على الأقل جذر واحد (من الممكن أن يكون هذا الجذر حقيقياً أو مركباً) وينتج من ذلك، بالتطبيقات المتكررة للنظرية، أن كل معادلة لها عدد n من الجذور إذا كانت المعادلة من الدرجة n، على أن يعتبر الجذر المكرر r من المرات r من الجذور، وبرهان هذه النظرية ليس أولياً، ويعطى عادة للفرق التي تدرس الدوال ذات المتغير المركب.

٩ ـ ٢ الجذور التخيلية:

إذا كانت معاملات حدود معادلة كثيرة الحدود:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

كلها أعداد حقيقية فإن الجذور التخيلية تكون مقترنة مثنى مثنى بمعنى، أنه إذا كان $\alpha + i\beta$ جذراً للمعادلة فإن الكمية المرافقة $\alpha - i\beta$ تكون أيضاً جذراً للمعادلة (α، β كميتان حقيقيتان، $i = \sqrt{-1}$)، أي أن الجذور التخيلية عددها زوجي. لذلك ينتج أن كل معادلة فردية لها على الأقل جذر حقيقي واحد. وعلى سبيل المثال فإن المعادلة ذات الدرجة الثالثة ذات المعاملات الحقيقية تكون جذورها الثلاثة كلها حقيقية، أو يكون لها جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان.

مثال (١):

واضح أن معاملات حدود المعادلة:

$$x^3 + (1 - 2\sqrt{3})\, x^2 + (5 - 2\sqrt{3})\, x + 5 = 0$$

كلهـا أعـداد حقيقيـة . . . وبمـا أن $\sqrt{3} - i\sqrt{2}$ جـذر للمعـادلـة فـإن :
$\sqrt{3} + i\sqrt{2}$ يكون أيضاً جذراً.

٩ ـ ٣ الجذور الصماء:

إذا كانت معاملات حدود معادلة كثيرة الحدود :

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

كلها أعـداد جـذريـة (العـدد الجـذري هـو العـدد الـذي يمكن كتـابتـه عـلى الصورة $\frac{p}{q}$ حيث q, p أعداد صحيحـة و $q \neq 0$) فإن الجذور الصماء تكون مقترنة مثنى مثنى بمعنى أنه إذا كان $\alpha + \beta\sqrt{\lambda}$ جذراً للمعادلـة فإن $\alpha - \beta\sqrt{\lambda}$ يكون أيضاً جذراً للمعادلة (β, α عددان جذريان).

مثال (٣) :

واضح أن معاملات حدود المعادلة :

$$x^3 + 8x^2 + 8x - 24 = 0$$

كلها أعداد جذرية. وبما أن $(-1 + \sqrt{5})$ جذر للمعادلة فإن :
$(-1 - \sqrt{5})$ يكون أيضاً جذراً.

٩ ـ ٤ العلاقة بين الجذور والمعاملات

لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هي جذور المعادلة (*) :

$$\therefore a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

ويضرب الأقـواس المـوجـودة في الـطرف الأيمن وبمسـاواة معـامـلات القـوى المتساوية في x في كل من الطرفين ينتج أن :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\frac{a_3}{a_0}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

أن أنه إذا كان S_1 هو مجموع الجذور فإن:

$$S_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

وإذا كان S_2 هو مجموع حاصل ضرب الجذور مأخوذاً مثنى مثنى فإن:

$$S_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

وعلى وجه العموم إذا كان S_n هو مجموع حواصل ضرب الجذور مأخوذاً n مرة فإن:

$$S_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

وبذلك يكون حاصل ضرب الجذور جميعها:

$$S_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

وبذلك يمكن كتابة المعادلة (*) على الصورة:

$$f(x) = a_0 \left[x^n - x^{n-1} S_1 + x^{n-2} S_2 - x^{n-3} S_3 + \dots + (-1)^n S_n\right]$$

فمثلاً لو كانت: x_1, x_2, x_3 هي جذور المعادلة:

$$x^3 - 6x^2 - 7x - 8 = 0$$

فينتج أن:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -(-6) = 6$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = -7$$

$$x_1 x_2 x_3 = -(-8) = 8$$

مثال (٣):

أوجد جذور المعادلة: $x^3 - 5x^2 + 2x + 24 = 0$

إذا علمت أن حاصل ضرب جذرين من جذورها يساوي 12.

الحل:

نفرض أن الجذور هي x_1, x_2, x_3

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$$S_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

$$S_3 = x_1 x_2 x_3 = -24 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iii)}$$

وإذا كان $x_1 x_2 = 12$ فإنه من (iii) ينتج أن:

$$x_3 = -2$$

وبالتالي يكون من (i)

$$x_1 + x_2 = 7$$

$$x_1 x_2 = 12$$

$$x_1 (7 - x_1) = 12$$

الآن ينتج أن:

$$x_1^2 - 7x_1 + 12 = 0$$

$$(x_1 - 3)(x_1 - 4) = 0$$

$$x_1 = 3 \Rightarrow x_2 = 4$$

$$x_1 = 4 \Rightarrow x_2 = 3$$

وتكون الجذور هي: $-2, 3, 4$

مثال (٤):

أوجد جذور المعادلة:

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$$

إذا علمت أن هذه الجذور تكوِّن متوالية عددية.

الحل:

نفرض أن الجذور هي: $\alpha-d, \alpha, \alpha+d$

$$S_1 = 3\alpha = 9 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$S_3 = \alpha(\alpha^2 - d^2) = 15$$

$$3(9 - d^2) = 15$$

$$d^2 = 4 \Rightarrow d = \pm 2$$

وتكون الجذور هي: $1, 3, 5$.

مثال (٥):

أوجد جذور المعادلة:

$$x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 30x + 25 = 0$$

إذا علمت أن لها جذرين على الصورة:

$$\alpha + i\beta \quad , \quad \beta + i\alpha$$

الحل:

حيث أن المعاملات كلها حقيقية، فلا بد أن يكون الجذران الآخران على الصورة:

$$\alpha - i\beta \ ، \ \beta - i\alpha$$

وبذلك يكون:

$$S_1 = 2\alpha + 2\beta = 6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (i)$$

$$S_4 = (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta)(\beta + i\alpha)(\beta + i\alpha) = 25 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

أي أن $\alpha^2 + \beta^2 = 5$

ومن (i) نجد أن: $\beta = 3 - \alpha$

وعليه

$$\alpha^2 + (3 - \alpha)^2 = 5$$

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

$$(\alpha - 2)(\alpha - 1) = 0$$

$$\alpha = 2 \Rightarrow \beta = 1$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \beta = 2$$

وتكون الجذور: $1 + 2i, 1 - 2i, 2 + i, 2 - i$

نفرض الآن أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذراً مكرراً $x=x_1$ وعدد مرات تكراره يساوي r أي أن:

$$f(x) = (x - x_1)^r g(x) = 0$$

بأخذ التفاضل نجد أن:

$$f'(x) = r(x - x_1)^{r-1} g(x) + (x - x_1)^r g'(x) = 0$$

$$f'(x) = (x - x_1)^{r-1} [r\, g(x) + (x - x_1) g'(x)] = 0$$

أي أن $x = x_1$ يكون جذراً مكرراً $(r-1)$ مرة للمعادلة $f'(x) = 0$.

مثال (٦):

أوجد جذور المعادلة

$$x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$$

إذا علمت أن لها جذراً مكرراً ثلاث مرات.

الحل:

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1)$$

وعليه فإن جذور $f''(x) = 0$ هي 1 وَ 1− وإذا عوضنا بهذه القيم في المعادلتين $f(x) = 0$ & $f'(x) = 0$ نجد أن الجذر 1 يحقق كلًّا منهما وعليه يكون $x=1$ جذر مكرر ثلاث مرات للمعادلة $f(x) = 0$. كذلك نلاحظ أن:

$$S_4 = -3$$

ومنه نجد أن الجذر الرابع هو: $x = -3$

وتكون الجذور هي: $1, 1, 1, -3$.

٩ ـ ٥ بعض المعادلات التي يؤول حلها إلى حل معادلة من الدرجة الثانية:

أ ـ معادلة على الصورة:

$$a x^4 + b x^2 + c = 0$$

يكفي أن نضع $x^2 = y$ فتصبح المعادلة

$$ay^2 + by + c = 0$$

مثال (٧):

أوجد جذور المعادلة:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

الحل:

بوضع $x^2 = y$ نجد أن:

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

أي أن:

$$(y-4)(y-1)=0$$

أي أن $y = 1, 4$، وبالتالي: $x^2 = 1, 4$، أي أن: $x = 1, -1, 2, -2$

ب ـ المعادلات على الصورة:

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=k \quad , \quad k \neq 0$$

بحيث يكون:

$$a+b=c+d$$

تكتب هذه المعادلة على الصورة:

$$[(x-a)(x-b)][(x-c)(x-d)]=k$$

وبالتالي يكون:

$$[x^2-(a+b)x+ab][x^2-(c+d)x+cd]=k$$

بوضع $y = x^2 - (a+b)x$

تأخذ المعادلة الصورة:

$$(y+ab)(y+cd)=k$$

ثم نحصل على حل المعادلة الأخيرة في y ونعوض بعد ذلك في المعادلة:

$$y = x^2 - (a+b)x$$

لإيجاد جذور المعادلة الأصلية.

مثال (٨):

أوجد جذور المعادلة:

$$(x-1)(x-3)(x+4)(x+5)=228$$

الحل:

نضع المعادلة في الصورة:

$$[(x-2)(x+4)][(x-3)(x+5)] = 228$$

أي أن:

$$[x^2+2x-8][x^2+2x-15] = 228$$

بوضع $y = x^2 + 2x$ نجد أن:

$$(y-8)(y-15) = 228$$

$$y^2 - 23y + 120 = 228$$

$$y^2 - 23y - 108 = 0$$

$$(y+4)(y-27) = 0 \Rightarrow y = -4 \text{ or } y = 27$$

وبالتالي يكون:

$$x^2 + 2x + 4 = 0 \quad \text{or} \quad x^2 + 2x - 27 = 0$$

أي أن:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+108}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{7}$$

وعليه فإن الجذور هي:

$$-1 + i\sqrt{3} \ , \ -1 - i\sqrt{3} \ , \ -1 + 2\sqrt{7} \ , \ -1 - 2\sqrt{7}$$

جـ - المعادلات على الصورة:

$$a x^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad , \quad a \neq 0$$

نضع المعادلة على الصورة:

$$a (x^4 + 1) + b (x^3 + x) + cx^2 = 0$$

بالقسمة على x^2 نجد أن:

$$a \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

بوضع $y = x + \frac{1}{x}$

نلاحظ أن: $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$

وبالتالي يكون:

$$a (y^2 - 2) + by + c = 0$$

$$a y^2 + by + (c - 2a) = 0$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في y يمكن إيجاد الجذرين y_1, y_2 ونعوض بهما في المعادلة: $y = x + \frac{1}{x}$

لنوجد جذور المعادلة الأصلية.

مثال (٩):

أوجد جذور المعادلة:

$$12x^4 + 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12 = 0$$

الحل:

نضع المعادلة على الصورة:

$$(12x^4 + 12) + (4 x^3 + 4x) - 41 x^2 = 0$$

وبالقسمة على x^2 نجد أن:

$$12\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-41=0$$

بوضع $y = x + \frac{1}{x}$ تصبح المعادلة الأخيرة على الصورة:

$$12(y^2-2)+4y-41=0$$

$$12y^2+4y-65=0$$

$$(2y+5)(6y-13)=0 \Rightarrow y=-\frac{5}{2} \quad \text{or} \quad y=\frac{13}{6}$$

عندما $y = -\frac{5}{2}$ نجد أن:

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$$

$$2x^2+5x+2=0$$

$$(2x+1)(x+2)=0$$

$$x=-\frac{1}{2} \quad , \quad x=-2$$

عندما $y = \frac{13}{6}$ نجد أن:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{13}{6}$$

$$6x^2-13x+6=0$$

$$(2x-3)(3x-2)=0$$

$$x=\frac{3}{2} \quad , \quad x=\frac{2}{3}$$

وتكون الجذور هي: $x=-\frac{1}{2}\ ,\ -2\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ \frac{2}{3}$

٩ ـ ٦ حل معادلات الدرجة الثالثة (طريقة كردان) (Cardan)

بفرض أن:

$$f(x) = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3$$

كثيرة حدود من الدرجة الثالثة، حيث a_0, a_1, a_2, a_3 أعداد حقيقية.

بوضع

$$g(x) = a_0^2\ f\left(\frac{x - a_1}{a_0}\right)$$

نحصل على:

$$\begin{aligned} g(x) &= (x - a_1)^3 + 3a_1 (x - a_1)^2 + 3a_0 a_2 (x - a_1) + a_0^2\ a_3 \\ &= x^3 + 3Hx + G \end{aligned}$$

حيث:

$$G = a_0^2\ a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3 \quad , \quad H = a_0 a_2 - a_1^2$$

نلاحظ أن:

$$g\ (a_0x + a_1) = a_0^2\ f\ (x)$$

وبالتالي إذا كان x_1 جذراً للمعادلة $f(x) = 0$ فإن $(a_0x_1 + a_1)$ يكون جذراً للمعادلة $g\ (x) = 0$.

نعلم أن الجذور التكعيبية للواحد الصحيح هي $1, \omega, \omega^2$:

بفرض أن u, v أي عددين حقيقين وبما أن:

$$(x - u - v)\ (x - u\omega - v\omega^2)\ (x - u\omega^2 - v\omega) = x^3 - 3uvx - u^3 - v^3$$

إذن يكون كل من:

$$u + v, u\omega + v\omega^2 \quad , \quad u\omega^2 + v\omega$$

جذراً للمعادلة:

$$x^3 - 3uvx - u^3 - v^3 = 0$$

هدفنا الآن هو إيجاد جذور المعادلة:

$$g(x) = x^3 + 3Hx + G = 0$$

لحل هذه المعادلة نضع:

$$x = u + v$$
$$x^3 = u^3 + 3u^2 v + 3v^2 u + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv (u + v)$$
$$x^3 = u^3 + v^3 + 3uvx$$

وتؤول المعادلة إلى:

$$u^3 + v^3 + 3uvx + 3Hx + G = 0$$

وباختيار u, v بحيث تربطهما العلاقة $3uv + 3H = 0$ ينتج أن: $u^3 + v^3 = - G$
وبذلك نحصل على العلاقتين:

$$u^3 + v^3 = - G \quad ، \quad u^3 v^3 = - H^3$$

لذلك تكون v^3 وu^3 جذري معادلة من الدرجة الثانية على الصورة

$$t^2 + Gt - H^3 = O$$

ويحل هذه المعادلة ينتج أن:

$$u^3 = \frac{1}{2} \left(- G + \sqrt{G^2 + 4H^3}\right)$$

$$v^3 = \frac{1}{2} \left(- G - \sqrt{G^2 + 4 H^3}\right)$$

$$x = \left[\frac{1}{2} (- G + \sqrt{G^2 + 4H^3} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[\frac{1}{2} (- G - \sqrt{G^2 + 4H^3}\right]^{\frac{1}{3}}$$

الآن نستنتج أن كلاً من:

$$u + v \text{ ، } u\omega + v\omega^2 \text{ ، } u\omega^2 + v\omega$$

جذر للمعادلة:

$$g(x) = x^3 + 3Hx + G = 0$$

مثال (١٠):

حل المعادلة:

$$x^3 + 3x^2 - 3x - 14 = 0$$

الحل:

$$a_1 = 1 \text{ ، } a_0 = 1$$

$$g(x) = a^2{}_0 \, f\left(\frac{x - a_1}{a_0}\right) = f(x-1)$$

$$= (x-1)^3 + 3(x-1)^2 - 3(x-1) - 14$$

$$= x^3 - 6x - 9$$

$$G = -9, \; 3H = -6 \Rightarrow H = -2$$

نعتبر المعادلة:

$$t^2 - 9t + 8 = 0$$

$$U^3 = 1 \text{ ، } V^3 = 8$$

إذن جذور المعادلة $g(x) = 0$ هي:

$$1 + 2 \text{ ، } \omega + 3\omega^2 \text{ ، } \omega^2 + 2\omega$$

$$3 \text{ ، } -\frac{1}{2}(3 \pm i\sqrt{3})$$

إذن الجذور هي:

$$2 \text{ ، } -\frac{1}{2}(5 \pm i\sqrt{3})$$

٩ ـ ٧ تمارين

(١) إذا كانت γ α, β هي جذور المعادلة

$$x^3 + px + r = 0$$

أوجد قيمة كل من:

(i) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

(ii) $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$

(iii) $(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta)$

(iv) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

(v) $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$

(٢) إذا كانت جذور المعادلة:

$$2x^3 + 6x^2 + 5x + d = 0$$

في متوالية عددية، حل المعادلة وأوجد قيمة d.

(٣) أوجد قيمة α بحيث يكون للمعادلة:

$$x^3 + x^2 - 8x + \alpha = 0$$

جذر مكرر ـ ولقيمة α هذه أوجد جميع جذور المعادلة.

(٤) إذا كانت ω هو أحد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح أثبت أن ω جذر مكرر للمعادلة:

$$3x^5 + 2x^4 + x^3 - 6x^2 - 5x - 4 = 0$$

(٥) إذا كان للمعادلة:

$$x^4 - (a + b)x^3 + (a - b)x - 1 = 0$$

جذر مكرر ثلاث مرات، أثبت أن:

$$a^2 - b^2 = 4$$

(٦) حل المعادلة:

$$x^4 - 11x^3 + 28x^2 + 36x = 144$$

إذا علمت أن حاصل ضرب جذرين من جذورها يختلف عن حاصل ضرب الجذرين الآخرين في الإشارة فقط.

(٧) حل المعادلة:

$$3x^3 - 7x^2 - 36x - 20 = 0$$

إذا علمت أن مجموع جذرين من جذورها يساوي 3 .

(٨) إذا كانت جذور المعادلة:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

تكون متوالية عددية فأثبت أن:

$$3p^3 + 27r = 9pq$$

(٩) حل المعادلة:

$$x^3 - 11x^2 + 37x - 35 = 0$$

إذا علمت أن أحد جذورها هو: $3 + \sqrt{2}$

(١٠) حل المعادلة:

$$x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 23x + 10 = 0$$

إذا علمت أن أحد جذورها هو: $2 + i$

(١١) حل المعادلة:

$$x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 10x + 1 = 0$$

(١٢) حل المعادلة:

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0$$

(١٣) إذا كان للمعادلة:

$$x^3 + px + q = 0$$

جذران متساويان أثبت أن:

$$4p^3 + 27q^2 = 0$$

حول المعادلة:

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$$

إلى الصورة:

$$x^3 + px + q = 0$$

ومن ثم أو بأي طريقة أخرى.. أوجد جميع جذور المعادلة.

(١٤) باستخدام طريقة كردان.. حل المعادلة:

$$x^3 - 18x - 35 = 0$$

هذا الكتاب

هذا الكتاب هو حصيلة تجارب سنوات عدة في كلية التربية بالمدينة المنورة، جامعة الملك عبدالعزيز، وهو مُزَوَّد بمادة مسهبة تغطي مقرراً في الجبر العام مدته ثلاث ساعات معتمدة. والكتاب يناسب المراحل الأولى في التعليم العالي ويحتوي على مجموعة من المواضيع التي تصلح أن تكون مورداً لعديد من المناهج في فروع الرياضيات والهندسة والاقتصاد. وبالإضافة إلى سِمَتِه ككتاب دراسي، سيروق عدداً كبيراً من القراء كما أنه سيكون بمثابة دليل فعّال للتعليم الذاتي ويرجع ذلك لمنهجه المبسط ولتدرج أمثلته.

ينقسم الكتاب إلى تسعة أبواب يبدأ كل باب بمجموعة من التعريفات والأساسيات المتعلقة بالموضوع مع مادة توضيحية ووصفية، تلي ذلك مجموعة متدرجة من المسائل المحلولة تستخدم في توضيح المادة ومجموعة من التمارين في نهاية كل باب بمثابة مراجعة كاملة للمادة المقدمة. لقد تم تنظيم الكتاب على نحو يسمح بالمرونة والإختيار وكان بودنا تقديم باب المصفوفات على المحددات حسب التسلسل الطبيعي للمادة وحرصاً منا فصل كل باب على حدة كما تتطلب طبيعة بعض التخصصات المختلفة التي يخدمها الكتاب، رأينا ترك هذا التسلسل إلى مرحلة متقدمة.